Equação do Terceiro grau

August 29, 2022

Prof. Doherty Andrade – www.metodosnumericos.com.br

1 Introdução

Vamos tomar como padrão a equação cúbica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

com coeficientes a, b, c reais ou complexos. Tomemos

$$Q = \frac{a^2 - 3b}{9}$$

e

$$R = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{54}.$$

Se Q e R são reais (isso é sempre verdade quando a, b, c são reais) e $R^2 < Q^3$, então a equação cúbica tem três raízes reais.

Determina-se estas raízes calculando

$$\theta = \arccos\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right)$$

e as três raízes:

$$x_1 = -2\sqrt{Q}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{a}{3},$$

$$x_2 = -2\sqrt{Q}\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) - \frac{a}{3},$$

$$x_3 = -2\sqrt{Q}\cos\left(\frac{\theta - 2\pi}{3}\right) - \frac{a}{3}.$$

Isso apareceu pela primeira vez no trabalho de François Viète de 1615.

Caso contrário, calcule

$$A = -\left[R + \sqrt{R^2 - Q^3}\right]^{\frac{1}{3}}$$

onde o sinal da raiz quadrada é escolhido para termos

$$\Re\left[\overline{R}\sqrt{R^2-Q^3}\right] \geq 0.$$

Se Q e R são ambos reais, então A e a parte real acima são equivalentes a

$$A = -\text{sgn}(R)\left[|R| + \sqrt{R^2-Q^3}\right]^{\frac{1}{3}}$$

onde a raiz quadrada positiva é assumida.

A seguir calcule

$$B = \begin{cases} \frac{Q}{A}, \text{ se } A \neq 0 \\ 0, \text{ se } A = 0. \end{cases}$$

Assim, as três raízes são dadas em termos de A e de B:

$$x_1 = (A+B) - \frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(A+B) - \frac{a}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B)$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(A+B) - \frac{a}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B)$$

2 Código Pyhton

Vamos fazer um procedimento que determina essas raízes conhecendo-se os coeficientes a, b e c.

In [8]:
```
import numpy as np
import math as ma
import cmath as mc
```

In [9]:
```
#apenas para coeficientes reais
# raízes quaisquer
import numpy as np
import math as ma
import cmath as mc
from cmath import sqrt

def cube_root(a,b,c):
    Q = (a**2-3*b)/9
    R = (2*a**3-9*a*b+27*c)/54
    if R**2 < Q**3:
        theta= np.arccos(R/Q**0.5)
```

```
            roots1 = -2*(Q**0.5)*(np.cos(theta/3))-a/3
            roots2 = -2*(Q**0.5)*(np.cos((theta+2*np.pi)/3))-a/3
            roots3 = -2*(Q**0.5)*(np.cos((theta-2*np.pi)/3))-(a/3)
            print(roots1, roots2, roots3)
        else:
            A = -np. sign(R)*(np.abs(R)+(R**2-Q**3)**0.5)**(1/3)
            if  A == 0:
                B = 0
            else:
                B = Q/A
                print('As raízes são:',(A+B)-a/3,
                -(1/2)*( A + B)- a/3 + mc.sqrt(-3)*(A - B)/2,
                      -(1/2)*( A + B)-
                      a/3 - mc.sqrt(-3)*(A -
                      B)/2)
```

```
In [11]: cube_root(-6, -11,-6)
```

```
As raízes são:7.5600055060953455 (-0.7800027530476727+0.4304020456014623j)(-0.7800027530
```