Resumo das Propriedades Básicas das Funções Contínuas

Prof. Doherty Andrade

2005

Sumário

Capítulo 1

Corpos Ordenados

1.1 O Corpo dos Números Reais

Vamos rever algumas coisas que já sabemos sobre o corpo dos números reais.

Por corpo entendemos um conjunto $\mathbb{K}$ munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, aqui indicadas por $+$ e $\cdot$, que satisfazem:

A1) se $x, y \in \mathbb{K}$, então $x + y \in \mathbb{K}$,

A2) se $x, y \in \mathbb{K}$, então $x + y = y + x$,

A3) se $x, y, z \in \mathbb{K}$, então $x + (y + z) = (x + y) + z$,

A4) existe $0 \in \mathbb{K}$ tal que $0 + x = x$,

A5) para cada $x \in \mathbb{K}$, existe um elemento denotado por $-x \in \mathbb{K}$ tal que $x + (-x) = 0$,

M1) se $x, y \in \mathbb{K}$, então $x \cdot y \in \mathbb{K}$,

M2) se $x, y \in \mathbb{K}$, então $x \cdot y = y \cdot x$,

M3) se $x, y, z \in \mathbb{K}$, então $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,

M4) existe um elemento $1 \in \mathbb{K}$ tal que $1 \cdot x = x$,

M5) se $x \in \mathbb{K} - \{0\}$ então existe um elemento denotado por $\frac{1}{x} \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = 1$,

D) se $x, y, z \in \mathbb{K}$, então $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Note que um corpo tem os elementos: 0 e 1.

Notemos que se $a \in \mathbb{K}$, podemos definir na para cada natural n indutivamente:

$1 \cdot a = a$ e

$(n+1) \cdot a = a + n \cdot a$.

Pode acontecer que $p \cdot a = 0$ para algum $p \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{K} - \{0\}$. Se p é o menor natural para o qual $p \cdot 1 = 0$ dizemos que $\mathbb{K}$ tem característica p. Se $p \cdot 1 \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{N}$ dizemos que $\mathbb{K}$ tem característica zero.

Considere $\mathbb{Z}_3$ o conjunto das classes residuais módulo 3. Defina as seguintes operações:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \ \text{ e } \ \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}.$$

Veja a tábua de operações para este conjunto munido das operações acima.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Mostra-se que estas operações estão bem definidas e que este conjunto munido destas operações é um corpo.

Os axiomas da adição para corpo implicam na seguinte proposição cuja prova é deixada como exercício.

Proposição 1 *Os axiomas da adição implicam*

a) se $x + y = x + z$, *então* $y = z$,

b) se $x + y = x$, *então* $y = 0$,

c) se $x + y = 0$, *então* $y = -x$,

d) $-(-x) = x$.

Os axiomas da multiplicação implicam na seguinte proposição cuja prova é deixada como exercício.

Proposição 2 *Os axiomas da multiplicação implicam*

a) se $x \neq 0$ *e* $xy = xz$ *então* $y = z$*,*

b) se $x \neq 0$ *e* $xy = x$ *então* $y = 1$*,*

c) se $x \neq 0$ *e* $xy = 1$ *então* $y = \frac{1}{x}$*,*

d) $x \neq 0$ *então* $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$*.*

Proposição 3 *Os axiomas da multiplicação implicam*

a) $0 \cdot x = 0, \forall x$*.*

b) se $x \neq 0$ *e* $y \neq 0$ *então* $xy \neq 0$*,*

c) se $(-x)y = -(xy) = x(-y)$

d) se $(-x)(-y) = xy$*.*

Definição 1 *Um corpo* $\mathbb{K}$ *é ordenado se* $\mathbb{K}$ *é um conjunto ordenado pela relação de ordem total* $\leq$ *e esta ordem é compatível com as operações, isto é,*

a) se $a \leq b$ *então* $a + c \leq b + c, \ \forall c \in \mathbb{K}$*,*

b) se $a \leq b$ *e* $0 \leq c$ *então* $ac \leq bc$*.*

Outra forma equivalente de dizer que $\mathbb{K}$ é corpo ordenado é:
existe um conjunto P (chamado o conjuntos dos elementos positivos) tal que

1i) se $a \in \mathbb{K}$, então $a \in P$ ou $-a \in P$ ou $a = 0$,

2i) se $a, b \in P$, então $a + b \in P$,

3i) se $a, b \in P$, então $ab \in P$.

Se em $\mathbb{K}$ definimos a relação:

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P \cup \{0\},$$

e este é um corpo ordenado, então representamos por $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$.

Note que dentro de um corpo ordenado há uma cópia de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

Com relação ao conjunto dos números naturais o seguinte princípio é fundamental.

Teorema 1 (Princípio da Boa Ordenação) *Se $\subset A \cup \mathbb{N}$ e A ,/então A possui um menor elemento.*

Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado completo se vale o seguinte axioma (propriedade do supremo):

Propriedade do Supremo: Todo subconjunto não vazio $A \subseteq \mathbb{K}$ limitado superiormente tem um supremo.

Teorema 2 *Em um corpo ordenado completo, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente.*

Demonstração: De fato, suponha que seja limitado superiormente e seja $c = \sup \mathbb{N}$. Então , $c - 1$ não é cota superior de $\mathbb{N}$ e assim existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c - 1 < n$. Segue que $c < n + 1$ e assim c não é cota superior de $\mathbb{N}$, o que é absurdo. ■

Em um corpo ordenado completo, a seguinte propriedade, chamada arquimediana vale:

Proposição 4 *Seja $\mathbb{K}$ corpo ordenado completo. Se $x > 0$, então existe n natural tal que $x < n$.*

Demonstração: Suponha que em $\mathbb{K}$ não vale esta propriedade. Então existe $x \in \mathbb{K}$ tal que $n \leq x,\ \forall n$. Então o conjunto $\mathbb{N}$ em $\mathbb{K}$ deveria ser limitado por x e portanto teria um supremo x_0. Logo, $x_0 - 1$ não seria uma cota superior para $\mathbb{N}$. Assim, existe N natural tal que $x_0 - 1 < N$ e assim x_0 seria menor do que $N + 1$, o que é absurdo. ■

Como consequência temos que entre dois elementos de um corpo ordenado completo $\mathbb{K}$ existe um racional. Isto é, o conjunto dos racionais de $\mathbb{K}$ é denso em $\mathbb{K}$.

Proposição 5 *Seja $\mathbb{K}$ corpo ordenado completo. Então o conjunto dos racionais de $\mathbb{K}$ é denso em $\mathbb{K}$.*

Demonstração: De fato, se $0 \leq x < y$ então existe n natural tal que

$$\frac{1}{y-x} < n$$

e assim

$$y - x > \frac{1}{n}.$$

Existe um menor natural m tal que $nx < m$ e então $x < \frac{m}{n}$ e $m - 1 \leq nx$.

Portanto,

$$\frac{m-1}{n} \leq x$$

e como $x + \frac{1}{n} < y$, $\frac{m}{n} < y$, então ,

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

■

O seguinte teorema estabelece a unicidade do corpo do reais. A prova da existência do isomorfismo será omitida.

Teorema 3 *Existe um corpo ordenado completo $\mathbb{R}$. Se R_1 e R_2 são corpos ordenados, então existe um isomorfismo de corpos ordenados entre eles, isto é, existe uma aplicação $\Psi : R_1 \to R_2$ bijetora que preserva a estrutura:*

1i) $\Psi(x+y) = \Psi(x) + \Psi(y)$,

2i) $\Psi(xy) = \Psi(x)\Psi(y)$,

3i) se $x < y$, *então* $\Psi(x) < \Psi(y)$.

Duas construções do corpo dos números reais conhecidas foram dadas por Dedekind e por Cantor. Dedekind desenvolveu sua construção dos reais em 1858, mas só a publicou em 1872. Neste mesmo ano, Cantor apresentou uma construção usando sequências de Cauchy. Pela construção do corpo dos reais, pode-se mostrar que possui a propriedade do supremo. Esse não é o nosso objetivo e por isso vamos admitir conhecidas essa propriedade.

Nesse ponto supomos que já conhecemos o corpo do número reais denotado por $\mathbb{R}$ e suas propriedades.

Esse corpo $\mathbb{R}$ possui as seguintes propriedades básicas:

(a) $\mathbb{R}$ é ordenado e arquimediano.

(b) $\mathbb{R}$ contém $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Além disso, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

(c) **Propriedade do Supremo:** Todo subconjunto não vazio $A \subseteq \mathbb{R}$ limitado superiormente tem um supremo.

(d) $\mathbb{R}$ é completo.

Observe que (c) e (d) são propriedades equivalentes.

1.2 Distância em $\mathbb{R}$

Vamos introduzir uma função que será útil.

Função módulo ou valor absoluto:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x|, \end{array}$$

onde

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

Utilizando a função módulo podemos introduzir a noção de distância entre dois números reais: a distância entre dois reais $x, y \in \mathbb{R}$ é denotada por $d(x,y)$ e é dada por

$$d(x,y) = |x - y|.$$

Note que valem as seguinte propriedades:

(a) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(b) $d(x,y) = d(y,x)$.

(c) $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$, desiguladade triangular,

para quaisquer reais x, y, z.

Essas propriedades sugerem definir a noção de métrica

Definição 2 *Uma métrica ou distância em um conjunto X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:*

(i) $d(x,y) \geq 0$, *e* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$;

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$,

$x, y, z \in X$.

Um conjunto X munido de uma métrica d é chamado de espaço métrico. Representamos isso pelo par (X, d).

De acordo com essa definição $\mathbb{R}$ munido da métrica dada pela função módulo é um espaço métrico.

Definição 3 *Um intervalo de $\mathbb{R}$ é um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ tal que se x e $y \in I$ e $x < s < y$, então $s \in I$.*

Por (a,b) denotamos o intervalo dado por

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\},$$

chamado de intervalo aberto.

Por $[a,b]$ denotamos o intervalo dado por

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\},$$

chamado de intervalo fechado.

Por $[a,b)$ denotamos o intervalo dado por

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}.$$

Por $(a,b]$ denotamos o intervalo dado por

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}.$$

Vimos que $\mathbb{R}$ possui muitas propriedades importantes. Vamos isolar algumas dessas propriedades.

Alguns intervalos especiais podem ser descritos utilizando a métrica de $\mathbb{R}$.

Por exemplo, seja $r > 0$ e o intervalo

$$I = \{x \in \mathbb{R}; -r < x < r\}$$

pode ser escrito como

$$I = \{x \in \mathbb{R}; d(x,0) < r\}.$$

Se $r > 0$ e

$$I = \{x \in \mathbb{R}; -r \leq x \leq r\}$$

pode ser escrito como

$$I = \{x \in \mathbb{R}; d(x,0) \leq r\}.$$

Por outro lado, o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}; d(x,x_0) < r\}$$

é o intervalo

$$I = \{x \in \mathbb{R}; -r < x - x_0 < r\}.$$

Por analogia com o círculo, chamamos o intervalo acima, de bola aberta com centro em x_0 e raio r.

O intervalo

$$I = \{x \in \mathbb{R}; -r \leq x - x_0 \leq r\}$$

é chamado de bola fechada com centro em x_0 e raio r.

1.3 Sequências de números reais

Uma seqüência (infinita) de números reais é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais:

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

É usual representar a imagem $x(n)$ por x_n. Também é usual representar uma seqüência por
$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ ou resumidamente por (x_n).

Uma subseqüência de uma seqüência (x_n) é a restrição de (x_n) a um subconjunto infinito N' de $\mathbb{N}$.

Definição 4 *Dizemos que a seqüência (x_n) é:*
(a) limitada superiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M, \forall n$.
(b) limitada inferiormente se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq x_n, \forall n$.
(c) limitada se existe $K \geq 0$ tal que $|x_n| \leq K, \forall n$.

Exemplos

a) $x_n = \frac{1}{n}$ é limitada, inferiormente por 0 e superiormente por 1.
b) $x_n = (-1)^n$ é limitada, inferiormente por -1 e superiormente por 1.
c) $x_n = n^2$ é limitada inferiormente por 0 e não é limitada superiormente.

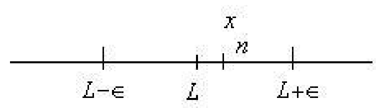
Dizemos que as seqüências (x_n) e (y_n) são iguais se $x_i = y_i$ para todo i natural.

Dizemos que a seqüência (x_n) converge para o número real L, se a diferença

$|x_n - L|$, a partir de algum índice n_0, puder ser feita tão pequena quanto desejado. Em termos matemáticos, dizemos isto com a seguinte definição

Definição 5 *Dizemos que a seqüência (x_n) converge para o número real L, se dado um número $\epsilon > 0$ qualquer existe um número natural n_0 tal que*

$$|x_n - L| < \epsilon, \ \ \forall n \geq n_0.$$



Usamos as notações

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \quad \text{ou} \quad x_n \to L,$$

para dizer que a seqüência (x_n) converge para L.

Se a seqüência não é convergente, dizemos que a seqüência é divergente.

Notemos que a seqüência $x_n = \frac{1}{n}$ converge para 0. De fato, dado o real $\frac{1}{\epsilon} > 0$ existe um número natural n_0 tal que $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Assim, para todo $n \geq n_0$ temos que

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Já a seqüência $x_n = (-1)^n$ não converge para real algum. Também, mas por outro motivo, a seqüência $x_n = n$ não converge.

Teorema 4 (Unicidade do limite) *Se uma seqüência é convergente, então o seu limite é único.*

Demonstração: Suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Então, dado $\epsilon > 0$

existe n_0 tal que

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |x_n - b| < \frac{\epsilon}{2}, \;\; \forall n \geq n_0.$$

Logo,

$$|a - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \, \forall n \geq n_0.$$

Como ϵ é arbitrário, segue que $a = b$. Isto conclui a prova do teorema. ■

Como vimos nos exemplos, nem toda seqüência limitada é convergente.

• **Exemplo 1**

Dado um número natual $N \geq 0$, a seqüência definida por

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_{k-1} + \frac{N}{x_{k-1}}\right)$$

aproxima a raiz quadrada do número natural N já era conhecido pelos babilônios 17 séculos antes de cristo. Note que se o chute inicial for um número racional, então a seqüência gerada é composta apenas de numeros racionais. Assim, tomando $N = 2$, geramos uma seqüência de racionais que converge para o irracional $\sqrt{2}$.

Teorema 5 *Toda seqüência convergente é necessariamente limitada.*

Demonstração: Suponha que a seqüência (x_n) seja convergente e seja L o seu limite. Então, dado $\epsilon = 1$, existe um natural n_0 tal que

$$|x_n - L| < 1, \;\; \forall n > n_0.$$

Logo, para $n > n_0$ os termos x_n são limitados

$$L - 1 < x_n < 1 + L.$$

O conjunto dos termos x_n com $n \leq n_0$, também é limitado pois é um conjunto finito. Isto mostra o teorema. ∎

Teorema 6 *Toda subseqüência de uma seqüência convergente, é convergene.*

Demonstração: De fato, Seja (x_n) uma seqüência convergente para a e (x_{n_k}) uma subseqüência. Dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$|x_n - a| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Tomando $n_k \geq n_0$, temos

$$|x_{n_k} - a| < \epsilon, \quad \forall n_k \geq n_0.$$

E assim segue o resultado. ∎

Exercícios 1 *Verfique que a seqüência* $x_n = \dfrac{n}{3n+1}$ *converge para* $\dfrac{1}{3}$.

Podemos definir uma seqüência, ou listando os seus elementos ou informando a sua lei de formação.

Por exemplo a seqüência dada por

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, n \geq 3.$$

Neste caso dizemos que a seqüência foi definida recursivamente. Esta é a seqüência de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots,)$. É exemplo de seqüência que não converge.

Como exemplo, escreva os elementos da seqüência

$$x_1 = 1, x_n = n \cdot x_{n-1}, n \geq 2.$$

Definição 6 *Dizemos que a seqüência* (x_n) *é crescente se verifica* $x_n \leq x_{n+1}$ *para todo* $n \geq 1$ *natural.*

Dizemos que a seqüência (x_n) é decrescente se verifica $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \geq 1$ natural.

Chamamos de seqüência monótona toda seqüência que é crescente ou decrescente.

O seguinte resultado estabelece uma relação entre os conceitos de seqüência monótona e seqüência convergente.

Teorema 7 *Toda seqüência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Seja a seqüência (x_n). Podemos supor que a seqüência é monótona crescente. Como (x_n) é limitada, segue que o conjunto $X = \{x_n, n \geq 1\}$ é limitado. Logo, pelo axioma do supremo, X possui supremo L. Dado $\epsilon > 0$, segue que $L - \epsilon$ não é supremo de X e assim existe n_0 tal que

$$x_{n_0} > L - \epsilon.$$

Como a seqüência é crescente, segue que

$$x_n \geq x_{n_0} > L - \epsilon, \;\; \forall n \geq n_0.$$

Donde,

$$0 \leq L - x_n < \epsilon, \;\; \forall n \geq n_0.$$

O que mostra que a seqüência é convergente. ■

Uma prova análoga pode ser feita para provar que o ínfimo é o limite de uma seqüência decrescente limitada inferiormente. Deixamos essa parte como exercício.

Note que toda seqüência monótona convergente é limitada, pois já provamos que toda seqüência convergente é limitada.

1.4 Seqüências de Cauchy

Uma seqüência é chamada seqüência de Cauchy se a partir de algum índice n_0 os seus termos estão tão próximos, entre si, quanto desejado. Em termos matemáticos,

Definição 7 *Dizemos que uma seqüência (x_n) é de Cauchy se dado $\epsilon > 0$ existe n_0 natural tal que se $m, n \geq n_0$ então tem-se*

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

Lema 1 *Toda seqüência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy. Dado $\epsilon = 1$ existe n_0 natural tal que

$$|x_n - x_m| < 1, \ \forall m, n \geq n_0.$$

Tomando $m = n_0$ temos

$$x_{n_0} - 1 < x_n < 1 + x_{n_0}, \ \forall n \geq n_0,$$

isto é, o conjunto dos termos $x_n, n \geq n_0$ é limitado. Os termos anteriores a n_0 são em quantidade finita e portanto limitados. Segue que a seqüência é limitada. ■

Lema 2 *Toda seqüência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência convergente e suponha que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. Então, para cada $\epsilon >$ dado existe n_0 natural tal que

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \ \forall n > n_0.$$

Sejam $m, n \geq n_0$, então temos

$$|x_m - x_n| = |x_m - a - x_n + a| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isto mostra que a seqüência (x_n) é de Cauchy. ■

Teorema 8 *Se uma seqüência de Cauchy tem uma subseqüência convergente, então a seqüência é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy e (x_{n_k}) subseqüência de (x_n). Por hipótese, existe a tal que $x_{n_k} \to a$. Logo, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 natural tal que se $n_k > n_0$ então

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, como a seqüência é de Cauchy, para o $\epsilon > 0$ dado existe n_1 natural tal que se $m, n > n_1$, então

$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomemos $N = \max\{n_0, n_1\}$ e $m, n_k > N$, então

$$|x_m - a| \leq |x_m - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isto conclui a prova do teorema. ■

Teorema 9 *Em $\mathbb{R}$ toda seqüência de Cauchy é convergente.*

A prova desse importante resultado depende do Teorema de Bolzano-Weierstrass,

Teorema 10 (Bolzano-Weierstrass) *Toda seqüência limitada do $\mathbb{R}$ possui uma subseqüência convergente.*

Demonstração: Suponha que temos uma sequência limitada (x_n) no conjunto dos números reais. Isso significa que existe um intervalo $I = [a, b]$ que contém todos os termos da sequência. Dividimos esse intervalo ao meio obtendo dois subintervalos

$$I_1' = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \text{ e } I_2'' = \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

Verificamos que pelo menos um dos subintervalos contém infinitos termos da sequência. Escolhemos esse subintervalo como o novo intervalo $[a_1, b_1]$ cujo comprimento é $\frac{b-a}{2}$.

Em seguida, repetimos o processo, dividindo o intervalo $[a_1, b_1]$ ao meio e verificando que pelo menos um dos subintervalos contém infinitos termos da sequência. Novamente, escolhemos esse subintervalo como o novo intervalo $[a_2, b_2]$ cujo comprimento é $\frac{b-a}{2^2}$.

Repetimos o processo sempre escolhendo um subintervalo que contenha infinitos termos da sequência, as esses subintervalos chamamos intervalo $[a_n, b_n]$ cujo comprimento é $\frac{b-a}{2^n}$.

Essa construção nos dá uma sequência de intervalos fechados $[a_n, b_n]$ que são encaixados.

Como cada subintervalo $[a_k, b_k]$ contém infinitos elementos da sequência (x_n), podemos escolher em cada um deles um elemento x_{n_k} tomando o cuidado de escolher o elemento que tenha o menor índice n_k. Desse modo tem-se que:

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k \ldots.$$

A escolha dos índices n_k é possível pelo princípio da boa ordenação.

Afirmamos que a subsequência (x_{n_k}) é convergente.

Note que $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$. Portanto, convergem para o mesmo limite que chamaremos de c.

Além disso, como $a_n \leq x_{n_k} \leq b_n$ segue que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$.

Assim, extraímos da sequência (x_n) uma subsequência (x_{n_k}) que é convergente.

Isso demonstra que toda sequência limitada do conjunto dos números reais possui uma subsequência convergente. ■

Um corpo em que toda seqüência de Cauchy é convergente é chamado de corpo completo, assim o teorema 9 diz que o corpo $\mathbb{R}$ é completo.

Quando introduzimos o corpo dos números reais assumimos o axioma do supremo: **todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não-vazio e limitado superiormente tem um supremo**. Isto é equivalente a $\mathbb{R}$ ser um corpo completo. Temos assim duas formulações equivalentes para corpo completo.

Demonstração do Teorema 9: Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como já vimos, o conjunto $X = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ é limitado em $\mathbb{R}$. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subseqüência (x_{n_k}) convergente para $a \in \mathbb{R}$. Segue que a seqüência (x_n) é também convergente para a. ■

Podemos resumir o resultado o teorema 9 com o seguinte corolário.

Corolário 1 *$\mathbb{R}$ é um corpo completo.*

Proposição 6 *Não existe racional q tal que $q^2 = 2$.*

Demonstração: A prova é por contradição. Suponha que exista racional q tal que $q^2 = 2$. Podemos supor que $q = m/n$ onde m e n não possuem fatores em comum. Logo,

$$2 = q^2 = m^2/n^2$$

e assim $m^2 = 2n^2$.

Segue que m é par, isto é, $m = 2k$ para algum k natural, e portanto

$$2n^2 = m^2 = 4k^2.$$

Segue que $n^2 = 2k^2$. Isto significa que n^2 é par e portanto, n é par. Isto contradiz a hipótese de m e n não terem fatores em comum. ■

Teorema 11 *Seja $S = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0 \text{ e } q^2 < 2\}$. Então, $\sup(S) = \sqrt{2}$.*

Demonstração: Vamos dividir a demonstração em partes.

Afirmação 1: *S é não vazio e limitado superiormente.*

S é não vazio, pois claramente $1 \in S$. Além disso, 2 é uma cota superior para S, pois se $x > 2$ então $x^2 > 2^2 = 4 > 2$, e assim qualquer numero maior do que 2 não pode pertencer a S.

Afirmação 2: *O supremo of S em $\mathbb{R}$ é $\sqrt{2}$.*

Pela propriedade do supremo dos números reais, $a = \sup(S)$ existe. Precisamos provar que $a^2 = 2$. Para fazer isso, vamos considerar duas possibilidades $a^2 < 2$ e $a^2 > 2$ e mostrar que as duas levam a contradição.

(i) *Suponha $a^2 > 2$.*

Vamos mostra que existe $b > 0$ em $\mathbb{R}$ que é menor do que a e que também satisfaz $b^2 > 2$.

Isto significa que b é também uma cota superior para S, contrariando a definição de a.

De fato, vamos verificar que se b é positivo e satisfaz $b^2 > 2$, então b é uma cota superior. Note que para qualquer $q \in S$,

$$(b-q)(b+q) = b^2 - q^2 > 0.$$

Como b e q são ambos positivos, dividimos ambos por $b + q$ para obter($b - q > 0$.)

Para mostrar que um tal b existe, considere $b = a - \delta$ onde $\delta > 0$. Então,

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$$

assim $b^2 = a^2 - \delta(b+a)$. Como $b + a < 2a$ (assumimos $\delta > 0$ então $b = a - \delta < a$)

$$b^2 > a^2 - 2\delta a.$$

Se tomarmos

$$\delta = \frac{a^2-2}{2a} > 0,$$

então isto nos diz que $b^2 > 2$. Devemos verificar que esse valor de δ torna

$b > 0$. Mas

$$b = a - \delta = \frac{1}{2a}(2a^2 - a^2 + 2) = \frac{1}{2a}(a^2 + 2) > 0.$$

(ii) *Suponha* $a^2 < 2$. Vamos mostrar que existe um elemento de S que é maior do que a, isto contradiz o fato de a ser uma cota superior de S. Novamente,, a idéia é escrever $b = a + \delta$ para $\delta > 0$ e escolher δ apropriado.

Como antes,

$$b^2 = a^2 + (b - a)(b + a) = a^2 + \delta(b + a)$$

Para obter $b^2 < 2$, precisamos $\delta < (2 - a^2)/(b + a)$. Existe um problema com isto: não sabemos o que b é.

Mas se b serve para todos, ele certamente tem que ser menor do que 2, e assim tomamos

$$\delta = (2 - a^2)/(2 + a).$$

Primeiro, escolhemos $\delta > 0$ pois estamos assumindo que $a^2 < 2$, e então $b > a > 0$.

A seguir,

$$b = a + \delta = a + \frac{2 - a^2}{2 + a} = \frac{2a + a^2 + 2 - a^2}{2 + a} = 2\frac{a + 1}{a + 2} < 2$$

Thus,

$$\delta = \frac{a - a^2}{2 + a} < \frac{2 - a^2}{b + a},$$

e assim, $b^2 = a^2 + \delta(b + a) < a^2 + (2 - a^2) = 2$.

Isto dá uma contradição? Não ainda, porque embora $b > 0$ e $b^2 < 2$, b provavelmente não está em $\mathbb{Q}$, e assim não está em S.

Podemos contornar essa dificuldade facilmente: usando a densidade de $\mathbb{Q}$, corolário 11. Podemos encontrar um racional q com $a < q < b$. Então, $q > 0$ e $q^2 < b^2 < 2$, assim $q \in S$, mas $q > a$, dando a contradição. ■

Capítulo 2

Propriedades de Limites de Funções

2.1 Limites de Funções

Na secção anterior já provamos que $\mathbb{R}$ é completo. Mas para facilitar a linguagem, em todo esse texto admitiremos o seguinte axioma:

Axioma 1 (Completude do conjunto dos reais) *Todo subconjunto dos reais limitado superiormente admite um supremo.*

Desse axioma, concluímos que todo subconjunto dos reais limitado inferiormente admite um ínfimo.

Definição 8 (Pontos de acumulação) *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conjunto X quando todo intervalo de centro a contém algum ponto de X, diferente de a. Em outras palavras,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in X;\ 0 < |x - a| < \epsilon.$$

O conjunto de todos os pontos de acumulação de X será denotado por X', chamado o derivado do conjunto X.

Um ponto que não é de acumulação é chamado isolado.

Um ponto de acumulação pode ou não pertencer ao conjunto.

Se $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots, \}$, então 0 é o único ponto de acumulação e não pertence ao conjunto. Todos os demais são isolados.

Teorema 12 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. São equivalentes:*

a) a é ponto de acumulação de X.

b) existe uma sequência (x_k) de pontos de X, como $x_k \neq a$, tal que $\lim x_k = a$.

c) todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade de pontos de X.

Teorema 13 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in X$ um ponto de acumulação de X. Então,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta, \ x \in X$$

implica que

$$|f(x) - b| < \epsilon.$$

Note que o limite quando existe é único. De fato, se b e b' são limites, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ tem -se

$$|f(x) - b| < \epsilon, \ |f(x) - b'| < \epsilon.$$

Logo, temos

$$|b - b'| \leq |f(x) - b| + |f(x) - b'| < 2\epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, segue que $b = b'$.

Teorema 14 (Propriedades de limites de funções) *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ uma função, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X e $c \in \mathbb{R}$. Suponha que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = M.$$

Então, valem as seguintes propriedades:

(1). $\lim_{x\to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot L$.

(2). Regra da Soma: $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$.

(3). Regra do Produto: $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$.

(4). Regra do Quociente: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, *desde que* $M \neq 0$.

(5). Regra da Potência: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\frac{r}{s}} = L^{\frac{r}{s}}$.

Observação 1 *O limite de polinômio e limite de funções racionais decorrem das propriedades acima.*

Observe que a função pode não estar definida no ponto a e muitas vezes não está, pois como a é apenas um ponto de acumulação de X pode ocorrer que $a \notin X$.

• **Exemplo 2**

1. Seja $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $\forall x \neq 1$. Notemos que f não está definida em $x = 1$. Queremos investigar o limite $\lim_{x\to 1} f(x)$. Como $x \neq 1$, podemos escrever $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1.$$

Logo, $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$.

Você pode fazer um desenho e ver graficamente que isto de fato ocorre.

2. Seja $f(x) = \sqrt{x-2}$, $\forall x \geq 2$. Queremos investigar o limite $\lim_{x\to 2} f(x)$. Por inspeção, vemos que $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$. Para provar isto, tomemos $\epsilon > 0$ e devemos encontrar $\delta > 0$ tal que $0 < |x-2| < \delta$ implica $|f(x) - 0| < \epsilon$. De fato,

$$|f(x) - 0| = |\sqrt{x-2} - 0| = |\sqrt{x-2}| < \epsilon \Leftrightarrow (x-2) < \epsilon^2.$$

Logo, basta tomar $\delta < \epsilon^2$.

Teorema 15 (Teorema do Confronto ou Sanduíche) *Seja* $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ *e* a *ponto de acumulação de* X. *Suponha que* $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in X$. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, *então* $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Demonstração: Como $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$, então

$$|f(x) - L| < \epsilon \ \text{ e } \ |h(x) - L| < \epsilon.$$

Segue que

$$L - \epsilon < f(x) < \epsilon + L \ \text{ e, } \ L - \epsilon < h(x) < \epsilon + L.$$

Donde, para x tal que $0 < |x-a| < \delta$, tem-se

$$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \epsilon + L.$$

Isto é, $|g(x) - L| < \epsilon$, para x tal que $0 < |x-a| < \delta$. ■

Definição 9 *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que a é um ponto aderente a X se exite uma sequência (x_n) de pontos de X que converge para a. Dizemos que o conjunto X é fechado se contém todos os seus pontos de aderência.*

Ao conjunto de todos os pontos de aderência de X chamamos de o fecho de X e denotamos por $\overline{X}$. Note que todo ponto de acumulação de X é também um ponto de aderência de X.

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é dito compacto, se for limitado e fechado. Os intervalos $[a, b]$ São conjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Observação 2 (Limites Fundamentais)

Os seguintes limites são chamados de fundamentais:

1) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin(\dfrac{1}{x}) = 0$.

Seja $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ para $x \neq 0$. Como $-1 \leq \sin(u) \leq 1$ para todo $u \in \mathbb{R}$, temos a desigualdade $|f(x)| \leq |x|$, ou seja,

$$-|x| \leq f(x) = x\sin(\frac{1}{x}) \leq |x|, \forall x \neq 0$$

Como $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, segue do Teorema do sanduíche que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
Dado $\epsilon > 0$ devemos achar $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - 1| < \epsilon$$

para todo $x \in (-\delta, \delta)$. De fato, como

$$|\frac{\sin(x)}{x} - 1| = |x||\sin(x) - x|$$

e perto de zero $|\sin(x) - x|$ é limitada, por exemplo por 1, e $|x|$ tende, segue que

$$|\frac{\sin(x)}{x} - 1| = |x||\sin(x) - x| \leq |x|.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ tome $\delta = \epsilon$.

3) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

Capítulo 3

Propriedades das Funções Contínuas

As funções contínuas possuem inúmeras propriedades importantes. Vamos estudar aqui as propriedades mais elementares. No momento, ainda não temos maturidade para estudar algumas delas, mas devemos insistir para adquirir essa maturidade.

Em todo esse texto admitiremos o seguinte axioma:

Axioma 2 (Completude do conjunto dos reais) *Todo subconjunto dos reais limitado superiormente admite um supremo.*

Desse axioma, concluímos que todo subconjunto dos reais limitado inferiormente admite um ínfimo.

3.1 Continuidade

Definição 10 [1] *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua em $a \in X$ quando*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0; |x - a| < \delta, x \in X \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

[1]aqui supõe-se implicitamente que $a \in X$ seja um ponto de acumulação de X.

Ou equivalentemente, conforme provaremos mais tarde, dizemos que f é contínua em a quando

a) f está definida em a, e

b) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

• **Exemplo 3**

a) Se $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é linear ou afim, então é contínua em todos os pontos do domínio.

b) Dizemos que $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Lipschitziana se existe $K \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

para todo par $x, y \in X$. Toda função Lipschitziana é contínua.

Demonstre isso.

Teorema 16 (Construção de funções contínuas) *Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in X$. Se f e g são contínuas em a, então valem:*

a) kf é contínua em a

b) $(f + g)$ é contínua em a

c) $f.g$ é contínua em a

d) Se $g(a) \neq 0$, então $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a.

Teorema 17 (Continuidade da função composta) *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $Y \subset \mathbb{R}$, e $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ funções. Suponha que $f(X) \subset Y$ e assim $(g \circ f)$ está definida em X. Se f em contínua em $a \in X$ e g contínua em $b = f(a)$, então $(g \circ f)$ é contínua em $a \in X$.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, devemos provar que existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ implica que

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \epsilon.$$

Dado $\epsilon > 0$, como g é contínua em $b = f(a)$ existe $\gamma > 0$ tal que para $y \in Y$ e $|y - b| < \gamma$ tem-se

$$|g(y) - g(b)| < \epsilon.$$

Como f é contínua em a existe, para $\gamma > 0$ dado, um $\delta > 0$ tal que para $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ tem-se

$$|f(x) - f(a)| < \gamma.$$

Logo,

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \epsilon,$$

que é o que queríamos. ■

3.2 Propriedades

Definição 11 *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que a é um ponto aderente a X se existe uma sequência (x_n) de pontos de X que converge para a. Dizemos que o conjunto X é fechado se contém todos os seus pontos de aderência.*

Dessa definição, concluímos que se X é fechado e $a \in X$, então existe uma sequência (x_n) de elementos de X tal que $x_n \to a$.

Ao conjunto de todos os pontos de aderência de X chamamos de o fecho de X e denotamos por $\overline{\mathrm{X}}$. Note que todo ponto de acumulação de X é também um ponto de aderência de X.

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é dito compacto, se for limitado e fechado. Os intervalos $[a, b]$ são conjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Teorema 18 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Então, f é contínua em a se, e somente se, para toda sequência $(x_k) \in X$ tal que $x_k \to a$ tem-se $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.*

Demonstração: $\Longrightarrow]$ Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X$ tem-se $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in$

$(a-\delta, a+\delta) \cap X$, para todo $n > n_0$. Logo,

$$|f(x_n) - f(a)| < \epsilon, \ \forall n > n_0.$$

Isto é , $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.

$\Longleftarrow$] Reciprocamente, se f não é contínua em a, então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos obter $x_k \in X$ com $|x_k - a| < \frac{1}{k}$ e $|f(x_k) - f(a)| \geq \epsilon$. Então, temos $x_k \to a$ sem que $\lim f(x_k) = f(a)$. O que é absurdo. ■

O teorema acima nos diz que uma função é contínua se, e somente se, leva sequências convergentes em sequências convergentes.

Teorema 19 *Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ contínua em $c \in (a,b)$. Suponha que $f(c) > 0$. Então, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (c-\delta, c+\delta)$ então $f(x) > 0$.*

Demonstração: Como f contínua em $c \in (a,b)$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $V_\delta = |x - c| < \delta$, então $|f(x) - f(c)| < \epsilon$. Donde segue que $-\epsilon < f(x) - f(c) < \epsilon$. Isto é,

$$f(c) - \epsilon < f(x) < f(c) + \epsilon, \forall x \in V_\delta.$$

Para $\epsilon < f(c)$ dado, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$0 < f(x) < f(c) + \epsilon, \forall x \in V_{\delta_0},$$

assim $f(x) > 0$ para todo $x \in V_{\delta_0}$. ■

Vale um resultado análogo para $f(c) < 0$. Deixamos esta parte como exercício.

Um intervalo compacto é um intervalo limitado e fechado $I = [a,b]$. Uma sequência de intervalos compactos I_k é dita encaixada se $I_{k+1} \subseteq I_k$, para todo

k natural. O próximo resultado, é uma importante ferramenta muito utilizada na prova de outros resultados.

Teorema 20 (Intervalos encaixados) *Seja* (S_k) *uma sequência de intervalos compactos encaixados de* $\mathbb{R}$. *Então , a interseção deles é não vazia, isto é,*

$$\cap_{k=1}^{\infty} S_k \neq \emptyset.$$

Demonstração: Seja (I_k) uma sequência de intervalos compactos $I_k = [a_k, b_k]$. Sejam

$$\begin{aligned} A &= \{a_k, k \in \mathbb{N}\} \\ B &= \{b_k, k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Como a sequência é encaixada cada elemento de B é um limite superior para A. Seja $a = \sup A$, (estamos admitindo que todo subconjunto limitado superiormente dos reais admite um supremo) então $a_k \leq a \leq b_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Segue que $a \in I_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, provando que a interseção é não vazia. ∎

Como aplicação podemos agora provar que $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Corolário 2 $\mathbb{R}$ *é não enumerável.*

Demonstração: Basta provar que $[0, 1]$ é não enumerável. Se fosse enumerável, tomaríamos $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$ sobrejetora, então $f(1)$ não está em pelo menos um dos intervalos $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$, $[2/3, 1]$. Seja I_1 este intervalo. Quebrando este intervalo em três outros subintervalos congruentes, pelo menos um deles não contém $f(2)$. Denote este intervalo por I_2. Continuando desta maneira, obtemos uma sequência de intervalos compactos encaixados (I_k) tal que $f(k) \in I_k^c$, $\forall k \in \mathbb{N}$, onde I_k^c é o complementar de I_k. Segue que

$$f(\mathbb{N}) \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k^c = (\cap_{k=1}^{\infty} I_k)^c.$$

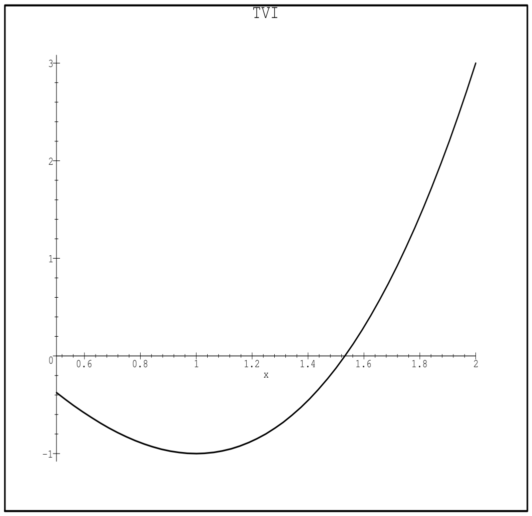


Figura 1: Ilusração do Teorema do valor intermediário

Isto contradiz a hipótese que f é sobrejetora porque a interseção da sequência (I_k) é não vazia. ■

Teorema 21 (Teorema do valor intermediário) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Seja $d \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < d < f(b)$. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração: Seja $g(x) = f(x) - d, x \in [a, b]$. É claro que g é contínua, $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$. Sejam $a_1 = a$, $b_1 = b$ e $m_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Notemos que $g(m_1)$ ou é igual a 0, ou maior do que 0 ou é menor do que 0. Se for igual a 0, então tomamos $c = m_1$ e a prova está terminada.

Se $g(m_1) > 0$, defina $a_2 = a_1$ e $b_2 = m_1$. Se $g(m_1) < 0$, então defina $a_2 = m_1$ e $b_2 = b_1$. Em cada caso, temos $g(a_2) < 0$ e $f(b_2) > 0$. Novamente seja $m_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$. Calcule $g(m_2)$. Se $g(m_2)$ valor for igual a 0, o resultado está provado com $c = m_2$. Se $g(m_2) > 0$ seja $a_3 = a_2$ e $b_3 = m_2$. Se $g(m_2) < 0$ seja $a_3 = m_2$ e $b_3 = b_2$. De novo, em cada caso, $g(a_3) < 0$ e $g(b_3) > 0$.

Continuando dessa maneira, ou encontramos uma solução após um número finito de passos ou encontramos uma sequência $[a_n, b_n]$ de intervalos compactos encaixados tal que

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}},\ g(a_n) < 0,\ \ g(b_n) > 0.$$

Segue do Teorema dos intervalos encaixados segue que existe $c \in (a, b)$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n$. Do Teorema 18 segue que $g(a_n) \to g(c)$ e $g(b_n) \to g(c)$.

Como $g(c) \leq 0 \leq g(c)$ segue que $g(c) = 0$ e portanto $f(c) = d$. ■

O seguinte teorema é um resultado simples sobre existência de ponto fixo.

Teorema 22 *Toda aplicação contínua $f : [a, b] \to [a, b]$ tem pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração: Defina a seguinte aplicação $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Assim g mede a distância orientada entre x e sua imagem $f(x)$. Um ponto fixo de f é um ponto x onde $g(x) = 0$. Se um dos extremos do intervalo é ponto fixo nada temos a provar. Então suponha que nenhum deles seja ponto fixo. Como $f(a)$ e $f(b)$ estão no intervalo $[a, b]$ segue que $a < f(a)$ e $f(b) < b$ e portanto $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$. Como g é contínua, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$ e portanto $f(x_0) = x_0$. ■

O teorema acima pode ser visualizado no gráfico.

Teorema 23 *Toda aplicação contínua de um círculo na reta tem um par de pontos diametralmente opostos com mesma imagem.*

Demonstração: Seja $f : C \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua do círculo C na reta $\mathbb{R}$. Se x e x' são pontos diametralmente opostos sobre C, defina $g : C \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - f(x')$. Como f é contínua, então g também é. Além disso,

$$g(x') = f(x') - f(x) = -(f(x) - f(x')) = -g(x).$$

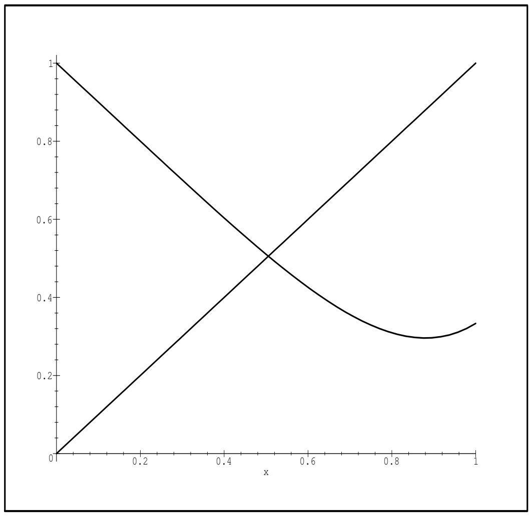


Figura 2: O ponto fixo ocorre onde $y = x$ e $f(x)$ se cruzam.

Segue que g tem sinais opostos em x e em x' ou é zero em x e x'. Se $g(x) = 0$, então $f(x) = f(x')$. No outro caso, como g é contínua existe um ponto x_0 tal $g(x_0) = 0$, isto é, $f(x_0) = f(x_0')$. ■

O mesmo resultado vale para a esfera. Prove isto. Tomando a Terra como uma esfera, e a função como temperatura, então em cada instante, existem pontos diamentralmente opostos na terra com a mesma temperatura.

Teorema 24 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua não constante. Então, $f(I)$ é um intervalo.*

Demonstração: Lembramos que um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, se e somente, se satistaz às seguintes propriedades:

i) S contém mais do que um ponto;

2i) se $x_1, x_2 \in S$ e $x \in (x_1, x_2)$, então $x \in S$.

Vamos provar que $f(I)$ satisfaz às propriedades acima.

Como f não é constante, sua imagem $f(I)$ tem mais que um ponto. Sejam $y_1, y_2 \in f(I)$. Segue que existem $x_1, x_2 \in I$ tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Suponha, para fixar as idéias que $x_1 < x_2$. Como f é contínua em $[x_1, x_2]$ podemos aplicar o o teorema do valor intermediário, assim dado $y \in (y_1, y_2)$

existe $x \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x) = y$. Verificando que $f(I)$ satisfaz à segunda condição. Logo, $f(I)$ é um intervalo. ■

O teorema de Bolzano-Weierstrass é um dos mais importantes resultados da Análise real.

Teorema 25 (Bolzano-Weierstrass) *Todo conjunto infinito limitado E de $\mathbb{R}$ tem um ponto de acumulação.*

Demonstração: Como E é limitado, então está contido em algum intervalo compacto S. O intervalo S pode ser coberto por um número finito de subintervalo onde cada um deles tem dimensão igual a metade da dimensão de S. Pelo menos um desses subintervalos contém um subconjunto infinito E_1 de E. Seja S_1 este subintervalo contendo E_1. Repetindo o processo com o conjunto infinito e limitado E_1 obtemos um subintervalo S_2 de dimensões igual a metade das dimenões de S_1 e que contém um subconjunto infinito E_2 de E_1. Seguindo este procedimento construímos uma sequência (S_k) de subintervalos compactos onde cada um contém um subconjunto infinito. Pelo teorema dos retângulos encaixados existe um elemento $a \in S_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Seja B a bola de centro a e raio $\epsilon > 0$ qualquer. Como as dimensões de cada S_k é 2^{-k} vezes as dimensões de S, então S_k estará dentro de B para k suficientemente grande. Assim, B contém um conjunto infinito de E e portanto a é um ponto de acumulação. ■

Teorema 26 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se $K \subset X$ é compacto, então $f(K)$ é compacto.*

Demonstração: Primeiramente vamos provar que $f(K)$ é fechado. Seja $y \in \overline{f(K)}$. Então, $y = \lim y_k$, onde $y_k \in f(K)$. Logo, $y_k = f(x_k)$, onde $x_k \in K$. Como (x_k) é limitada, existe subsequência (x_{k_n}) tal que $x_{k_n} \to x \in K$. Logo,

$$y = \lim f(x_{k_n}) = f(x)$$

e assim, $y \in f(K)$.

Agora provaremos que $f(K)$ é limitado. De fato, se não fosse limitado, obteríamos uma sequência (x_k) de elementos de K tal que $f(x_k) > k$. Logo, $(f(x_k))$ não admite subsequência convergente. Mas (x_k) tem subsequência convergente e $\lim x_k = x \in K$. Pela continuidade de f, temos

$$\lim f(x_{k_i}) = f(\lim x_{k_i}) = f(x),$$

uma contradição. ■

Corolário 3 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então, $f(I)$ é um intervalo compacto.*

Demonstração: Já provamos que $f(I)$ é um intervalo e no teorema acima $f(I)$ compacto. Logo, $f([a, b]) = [c, d]$, para algum intervalo $[a, d]$. ■

Como caso particular do teorema 26, temos o seguinte resultado importante em otimização de funções reais.

Teorema 27 *Seja K um conjunto compacto de $\mathbb{R}$ e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua. Então , f assume valores máximo e mínimo sobre o conjunto K, isto é, existem x_0 e $x_1 \in K$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \forall x \in K$.*

Demonstração: Sabemos que $f(K)$ é compacto e portanto é limitado e fechado. Como $f(K) \subset \mathbb{R}$ é fechado e limitado superiormente, então tem um máximo. Do mesmo modo $f(K)$ tem um mínimo. Então, existem x_0 e x_1 elementos de K tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$. ■

3.3 Continuidade Uniforme

Definição 12 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é uniformemente contínua sobre X se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - y| < \delta$ e $x, y \in X$, então*

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

A definição diz que o mesmo δ serve para cada par de pontos $x, y \in X$.

Teorema 28 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, f é uniformemente contínua sobre $[a, b]$.*

Demonstração: A prova é por contradição. Se f não é uniformemente contínua sobre $[a, b]$, existe $\epsilon > 0$ para o qual não existe $\delta > 0$ com a propriedade $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ para todos os pares $x_1, x_2 \in [a, b]$ com $|x_1 - x_2| < \delta$. Então, para cada $\delta = \frac{1}{n}$ exite um par de pontos $x_{1,n}, x_{2,n}$ de $[a, b]$ tal que

$$|x_{1,n} - x_{2,n}| < \frac{1}{n}, \quad \text{e} \quad |f(x_{1,n}) - f(x_{2,n})| \geq \epsilon. \tag{3.1}$$

Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, o conjunto $S = \{x_{1,n}, x_{2,n}, n \in \mathbb{N}\}$ tem uma subsequência (x_{1,n_k}) convergente para $x_0 \in [a, b]$.

Como $|x_{1,n_k} - x_{2,n_k}| < \frac{1}{k_n}$ segue que $x_{2,n_k} \to x_0$.

Como f é contínua temos que $f(x_{1,n_k}) \to f(x_0)$ e $f(x_{2,n_k}) \to f(x_0)$. Assim, existe natural n_0 tal que se $n \geq n_0$ então

$$|f(x_{1,n_k}) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$|f(x_{2,n_k}) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo,

$$|f(x_{1,n_k}) - f(x_{1,n_k})| \leq |f(x_{2,n_k}) - f(x_0)| + |f(x_{1,n_k}) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

O que contradiz (3.1). ■

3.4 Exercício

1. Use o teorema do valor intermediário para provar que para cada $n \geq 1$ e $d > 0$ a equação $x^n = d$ tem uma solução.

2. A função $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x^2$ é contínua. Portanto, assume máximo e mínimo. Determine esses pontos.

3. Mostre que a função $g(x) = x^3 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$, é estritamente crescente e conclua que possui inversa.

4. Verifique que a função $f(x) = x^2 + x - 1$ possui um ponto fixo.

5. Mostre que a função $g(x) = \sin(x), \forall x \in \mathbb{R}$ é uniformemente contínua. Sugestão: use que $\sin(a) - \sin(b) = 2\sin(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2})$.

Capítulo 4

Propriedades das Funções Deriváveis

4.1 Introdução

Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em x, e sua derivada é $f'(x)$, se

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se o limite existe.

Se $f'(x)$ existe para todo x do seu domínio, dizemos que f é derivável.
Notação: $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$,

Propriedades 1 *Sejam f e g funções deriváveis em a e $k \in \mathbb{R}$. Então,*

(a) *se $f(x) \equiv c$, então $f'(x) = 0$.*

(b) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

(c) $(kf)'(x) = kf'(x)$.

(d) $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$.

(e) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$.

Teorema 29 *Se f tem derivada em $x = a$, então f é contínua em $x = a$.*

Demonstração: como $f'(a)$ existe, devemos provar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Ou equivalentemente,

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a).$$

Dado $h \neq 0$, temos que

$$f(a+h) = f(a) + [f(a+h) - f(a)] = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.h$$

Tomando o limite quando h tende a zero, obtemos que

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) + \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right] . \lim_{h \to 0} h = f(a) + f'(a).0 = f(a).$$

Isto conclui a prova do teorema. ■

Teorema 30 (Regra da Cadeia) *Sejam $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ deriváveis tal que $g([a, b]) \subset [c, d]$. Então, $f \circ g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é derivável e*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x).$$

Demonstração: Vamos provar que $f \circ g$ é derivável em $x_0 \in (a, b)$. Devemos provar que o limite a seguir existe:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h}.$$

De fato, podemos reescrever a igualdade acima

$$\frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h} = \underbrace{\frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)}}_{I} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}_{II}.$$

Como g é contínua, então $g(x_0 + h) - g(x_0) \to 0$ quando $h \to 0$. Assim, I existe pois f é derivável e do mesmo modo II existe, pois g é derivável. Logo,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x).$$

Isto conclui a prova do teorema. ■

4.2 Propriedades

Teorema 31 *Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivável com $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$. Então, a função f é estritamente crescente.*

Demonstração: De fato, como o limite $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe e é maior do que zero, então para h suficientemente pequeno, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$. Logo, se $h > 0$, então $f(x+h) > f(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Se $h < 0$, então $f(x+h) < f(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Segue que f é estritamente crescente. ■

Um resultado análogo vale para $f'(x) < 0$, neste caso f será estritamente decrescente. Deixamos essa parte como exercício.

Sabemos que toda função estritamente crescente (ou decrescente) é injetora, assim restringindo f a sua imagem J, obtemos $f : (a,b) \to J$ bijetora.

Teorema 32 *Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivável tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$. Então, a função inversa de f, aqui representada por g, existe e vale*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Demonstração: Como $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é estritamente crescente e portanto possui inversa. Este é um resultado que provamos. Seja g a sua inversa. Queremos provar que o limite abaixo existe

$$\lim_{k \to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k}.$$

Pelo TVI, todo $y + k$, para k suficientemente pequeno, pode ser escrito como imagem de f. Seja $x = g(y)$ e $h = g(y + k) - g(y)$. Então,

$$x = g(y), \ \text{ e } g(y + k) = g(y) + h = x + h.$$

Logo, o quociente fica

$$\frac{g(y + k) - g(y)}{k} = \frac{h}{f(x + h) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}.$$

Quando $h \to 0$ temos que $k \to 0$. E reciprocamente, quando $k \to 0$, existe um único valor h tal que $f(x + h) = y + k$, pois f é invertível. Logo, $h \to 0$. Segue que

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Análogo, para $f'(x) < 0$. Isto conclui a prova do teorema. ■

Definição 13 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Dizemos que x_0 é ponto de máximo absoluto de f em I, se $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Nesse caso, $f(x_0)$ é o valor máximo absoluto de f.*

Dizemos que x_0 é ponto de mínimo absoluto de f em I, se $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in I$. Nesse caso, $f(x_0)$ é o valor mínimo absoluto de f.

Definição 14 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. Dizemos que x_0 é ponto de máximo local de f em I, se existe um intervalo aberto $J \subset I$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in J$. Nesse caso, $f(x_0)$ é um valor máximo local de f.*

Dizemos que x_0 é ponto de mínimo absoluto de f em I, se existe um intervalo aberto $J \subset I$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in J$. Nesse caso, $f(x_0)$ é um valor mínimo local de f.

Máximos e mínimos absolutos também são chamados de extremos globais e máximos e mínimos locais são chamados de extremos locais. Na figura 4.2, vemos que máximo e mínimo globais ocorrem nos extremos do intervalo, e o máximo e o mínimo locais ocorrem no interior do intervalo.

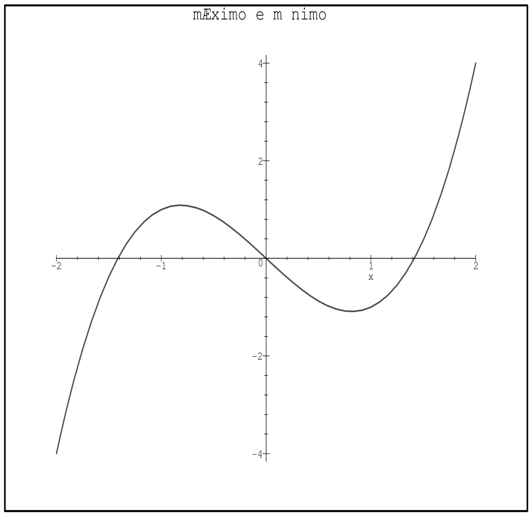


Figura 1: Máximos e Mínimos

Teorema 33 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b). Suponha que f assume seu valor máximo em $x_0 \in (a, b)$. Então, $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração: De fato, como $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in (a, b)$, e $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe, então obtemos para $h > 0$ que $f'(x_0) \leq 0$. Se $h < 0$ obtemos que $f'(x_0) \geq 0$. Logo, $f'(x_0) = 0$. ■

Observação 3

Um resultado análogo vale quando f assume o seu mínimo em algum ponto do interior do domínio. Deixamos esssa parte como exercício.

Resumindo: Se f assume máximo e mínimo no interior de se domínio, então a derivada se anula nesses pontos.

Definição 15 *Um ponto x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ é chamado de ponto crítico de f.*

Como vimos acima no teorema 33, os pontos de máximo e mínimo locais de uma função são pontos críticos. Mas (isso é importante) existem pontos críticos que não são pontos de máximo ou mínimo locais.

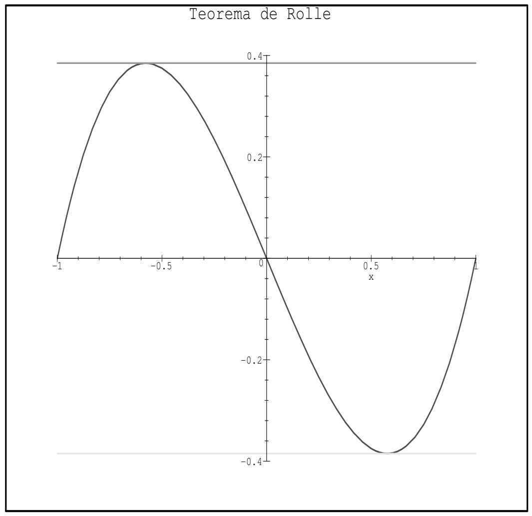


Figura 2: Teorema de Rolle

Teorema 34 (Teorema de Rolle) *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua e derivável em* (a,b). *Se* $f(a) = f(b) = 0$, *então existe* $x_0 \in (a,b)$ *tal que* $f'(x_0) = 0$.

Demonstração: Se $f(x) \equiv 0$, então não há o que provar. Se $f(x) \not\equiv 0$, então f deve ser ou positiva ou negativa em algum lugar. Suponha que f é positiva, pelo teorema do extremo, f assume o máximo em algum ponto x_0 de (a,b), portanto $f'(x_0) = 0$. Supondo que f seja negativa, aplicamos o teorema do extremo para o mínimo. ∎

Outra versão do Teorema de Rolle é dada a seguir, onde a condição $f(a) = f(b) = 0$ é retirada.

Teorema 35 (Teorema de Rolle-II) *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua e derivável em* (a,b). *Se* $f(a) = f(b)$, *então existe* $x_0 \in (a,b)$ *tal que* $f'(x_0) = 0$.

Demonstração: Suponha que $f(a) = f(b) = m$ e defina $g(x) = f(x) - m, \forall x \in [a,b]$. É claro que g é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Aplicando o Teorema de Rolle, segue que existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $g'(x_0) = 0$. Isto é, $f'(x_0) = 0$. ∎

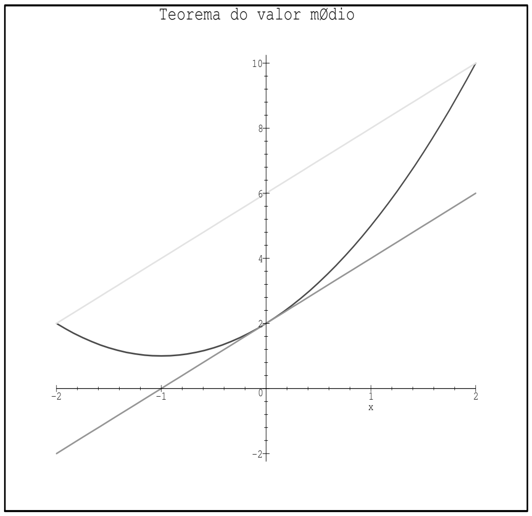


Figura 3: Teorema do vlaor médio

Teorema 36 (Valor Médio) *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua e derivável em* (a, b). *Existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração: Seja g a função definida por

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) - f(a), \forall x \in [a, b].$$

É claro que g tem as mesmas propriedades que f e $g(a) = g(b) = 0$. Assim, g satisfaza às condições do Teorema de Rolle, logo, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Segue que $g'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Existe uma versão mais geral do Teoema de Rolle, que apresentamos a seguir.

Teorema 37 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua e* n *vezes derivável em* (a, b). *Se existem* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *pontos em* $[a, b]$ *tais que* $f(x_i) = 0, i = 0, 1, \ldots, n$, *então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f^{(n)}(c) = 0$.

Corolário 4 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a,b). Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é constante.*

Demonstração: De fato, sejam $x < y$ pontos em (a,b). Pelo Teorema do valor médio aplicado no intervalo (x,y), temos que

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0.$$

Logo, $f(x) = f(y)$ para quaiquer $x, y \in (a,b)$. Logo, f é constante. $\blacksquare$

Corolário 5 *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas e deriváveis em (a,b). Se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$, então $f - g$ é constante.*

Demonstração: de fato, tome $h(x) = f(x) - g(x), \forall x \in [a,b]$. Segue que h é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Além disso, $h'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$. Logo, $h \equiv c$ para alguma constante e portanto, $f(x) - g(x) = c$. $\blacksquare$

4.3 Teste da derivada segunda para máximos e mínimos

Teorema 38 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e duas vezes derivável em (a,b). Seja $c \in (a,b)$ um ponto crítico de f.*

a) Se $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em $x = c$.

b) Se $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em $x = c$.

Demonstração: Suponha que $f''(c) < 0$, então pela definição

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} < 0.$$

Logo, tomando $h > 0$ obtemos que existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c, c+\delta)$. Segue que f é decrescente em $(c, c+\delta)$.

Do mesmo modo, tomando $h < 0$ obtemos que existe $\delta' > 0$ tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c - \delta, c)$.Segue que f é crescente em $(c - \delta', c)$.

Portanto, f assume máximo local em $x = c$.

O ítem b) é análogo. ■

Capítulo 5

Formas indeterminadas

O conjunto do números reais extendidos é o conjunto dos números reais acrescido de dois símbolos: $-\infty$ e $+\infty$. O conjunto dos números reais estendidos é ordenado como o conjunto dos números reais, sendo que $-\infty < r < \infty$ para qualquer real $r \in \mathbb{R}$.

Se x e y são reais, definimos:

$x + \infty = \infty + x = \infty$

$x - \infty = -\infty + x = -\infty$

$\infty + \infty = \infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$x\infty = \infty$, se $x > 0$

$x\infty = -\infty$, se $x < 0$

$\frac{\infty}{x} = \infty$, se $x > 0$

$\frac{\infty}{x} = -\infty$, se $x < 0$

$\frac{x}{\pm\infty} = 0$.

5.1 Introdução

São formas indeterminadas: $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ e 1^{∞}.

A razão para isso é que não existe uma forma definitiva de determinarmos o valor. Essas indeterminações surgem da necessidade de calcular limites; sendo que um estudo mais aprofundado desses casos mostra que as indeterminações dão um coisa ou outra.

Por exemplo, vamos calcular o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^{-n}}{10^{-n-2}}.$$

Vemos que tanto o numerador quanto o denominador tendem para zero. Então, teremos $\frac{0}{0}$. Mas,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^{-n}}{10^{-n-2}} = \lim_{n\to\infty} 10^{-n}10^{-n+2} = 10^2.$$

Por outro lado,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^{-n}}{10^{-n(1+\frac{1}{2})}} = \lim_{n\to\infty} 10^{\frac{n}{2}} = \infty.$$

5.2 A Regra de L´Hospital

Como $\frac{0}{0}$ é uma forma indeterminada, não é imediato calcular $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, onde $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Teorema 39 *Sejam f e g funções definidas e diriváveis em uma vizinhança V de a, onde a é algum número real extendido.*

Suponha que

(1) $g(x) \neq 0$ para todo x da vizinhança V.

(2) $g'(x) \neq 0$ para todo x da vizinhança V.

(3) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

(4) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$, onde c é algum real extendido.

Então, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$.

A nossa demonstração desse teorema necessita do teorema do valor médio de Cauchy.

Teorema 40 (Valor médio de Cauchy) *Sejam $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e deriváveis em (a, b) com $G'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$.*

Então, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}.$$

Demonstração: Tomemos a função dada por

$$H(x) = [F(x)-F(a)]\,[G(b)-G(a)] - [F(b)-F(a)]\,[G(x)-G(a)]\,.$$

É fácil ver que H é contínua em $[a,b]$ e dirivável em (a,b). Além disso, $H(a) = H(b) = 0$. Pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $H'(c) = 0$. Isto nos dá,

$$F'(c)\,[G(b)-G(a)] - [F(b)-F(a)]\,G'(c),$$

ou seja

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}.$$

■

Demonstração: (Teorema 39)

Seja b suficientemente pequeno de modo que $[a,b]$ esteja contido em V. Defina as funções

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a, \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Segue que F e G são contínuas em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), onde b é suficientemente pequeno de modo que $[a,b]$ esteja contido em V. Além disso, $G'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Pelo Teorema do valor médio de Cauchy, para cada $x \in (a,b)$, existe $a_x \in (a,b)$ tal que

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(a_x)}{G'(a_x)}.$$

Assim,

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\lim_{x\to a^+}\frac{F'(a_x)}{G'(a_x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(a_x)}{g'(a_x)}=c,$$

pois $a_x \to a$ quando $x \to a$.

Isto mostra que o limite lateral à direita é o esperado. De modo análogo, fazemos com o limite lateral à esquerda. Isto conclui a prova do teorema. ■

Observação 4

A regra de L´Hopital também vale para $\frac{\infty}{\infty}$ e para limites laterais.

• **Exemplo 4**

1. Determine $\lim_{x\to\infty}(x-\ln x)$. Diretamente, obtemos $\infty-\infty$. Vamos usar L´Hosptial.

Seja $y = x - \ln x$. Então, $e^y = \frac{e^x}{x}$. Tomando $x \to \infty$, obtemos $\lim_{x\to\infty} e^y = \infty$. Logo, $y \to \infty$, e portanto $\lim_{x\to\infty}(x-\ln x) = \infty$.

2. Determine o limite $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Note que diretamente, obtemos 1^∞.

Seja $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Aplicando ln obtemos

$$\ln y = x\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}.$$

Agora, calculando o limite diretamente, obtemos $\frac{0}{0}$. Vamos usar a regra de L´Hospital. Assim, temos

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

Como $\ln y \to 1$ quando $x \to \infty$, então $y \to e$ quando $x \to \infty$. Logo, temos que

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

5.3 Exemplos e contra-exemplos

Nesta seção apresentamos exemplos clássicos e interessantes de funções contínuas com problemas de diferenciabilidade.

A. A função de Dirichlet

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{se } x \text{ é irracional} \\ 0, \text{se } x \text{ é racional} \end{cases}$$

g não é contínua em algum ponto da reta.

B. Seja $g(x)$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, \text{se } x = \frac{p}{q} \text{ é racional} \\ 0, \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases} .$$

Tem uma quantidade enumerável de descontinuidades, a saber em todos os racionais.

C. Seja $g(x)$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), \text{se } x \neq 0 \\ 0, \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

É derivável em $x = 0$ mas a derivada não é contínua em $x = 0$.

D. A função $g(x) = \sqrt[3]{x^{3n+1}}$ é n-vezes derivável, mas a $(n+1)$-derivada não é contínua, isto é, não é $(n+1)$ vezes derivável.

E. A função dada por

$$g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, \text{se } x \neq 0 \\ 0, \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

É de classe C^∞ e a derivada em $x = 0$ é zero.

F. A função de Weierstrass dada por

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n |\sin(4^n x)|$$

é contínua em $\mathbb{R}$, mas não é derivável em ponto algum de $\mathbb{R}$.

Este é um exemplo de aplicação do seguinte teorema.

Teorema 41 *Seja $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ função real de período p tal que*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|.$$

Então a função f dada por

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$$

é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$, mas não é diferenciável em ponto algum.

Demonstração: Pelo teste M de Weierstrass a série converge uniformemente em $\mathbb{R}$ e portanto $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Fixemos $x \in \mathbb{R}$ e um natural m. Tomemos

$$\delta_m = \pm \frac{1}{2} 4^{-m},$$

onde o sinal é escolhido de modo que nenhum inteiro esteja entre $4^m x$ e $4^m(x + \delta_m)$. Isto pode ser feito, pois $4^m|\delta_m| = \frac{1}{2}$.

Defina

$$\gamma_n = \frac{\varphi(4^n(x+\delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m}.$$

Quando $n > m$, então $4^n \delta_m$ é um inteiro par, assim $\gamma_n = 0$. Quando $0 \leq n \leq m$, a condição de Lipschitz da função φ implica que $|\gamma_n| \leq 4^n$.

Concluímos que

$$\left| \frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m} \right| = \left| \sum_0^m \left(\frac{3}{4} \right)^n \gamma_n \right| \geq 3^m - \sum_0^{m-1} 3^n = \frac{1}{2} \left(3^m + 1 \right).$$

Quando $m \to \infty$, $\delta_m \to 0$. Segue que f não é diferenciável em x. ■

Veja também o exemplo devido a Waerden onde o argumento acima já foi usado.

G. A função de Cantor é contínua, derivável, crescente, não constante e a derivada é nula em quase todo ponto, exceto em um conjunto de medida nula.

Vamos relembrar um pouco sobre o conjunto de Cantor. Vimos que o conjunto de Cantor pode ser obtido de $[0,1]$ por meio da exclusão de uma quantidade enumerável de intervalos abertos, sendo assim fechado e limitado.

Seja $[a_1^{(1)}, b_1^{(1)}] = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ o terço médio de $[0,1]$.

Seja

$$[a_1^{(2)}, b_1^{(2)}] = [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}], \ [a_2^{(2)}, b_2^{(2)}] = [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$$

os terços médios dos intervalos restantes após retirar $[a_1^{(1)}, b_1^{(1)}]$ de $[0,1]$.

Seja

$$[a_1^{(3)}, b_1^{(3)}] = [\frac{2}{27}, \frac{2}{27}],\ [a_2^{(3)}, b_2^{(3)}] = [\frac{7}{27}, \frac{8}{27}],$$
$$[a_3^{(3)}, b_3^{(3)}] = [\frac{19}{27}, \frac{20}{27}],\ [a_4^{(3)}, b_4^{(3)}] = [\frac{25}{27}, \frac{26}{27}],$$

os terços médios dos intervalos restantes após retirar $[a_1^{(1)}, b_1^{(1)}]$, $[a_1^{(2)}, b_1^{(2)}]$ e $[a_2^{(2)}, b_2^{(2)}]$ de $[0,1]$.

Continuando desta maneira, no n-esimo estágio temos os intervalos

$$[a_1^{(n)}, b_1^{(n)}], \cdots, [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}], \cdots, [a_{2^{n-1}}^{(n)}, b_{2^{n-1}}^{(n)}].$$

O complemento da união de todos estes intervalos $[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]$ é o conjunto de Cantor.

Pertencem ao conjunto K de Cantor as extremidades dos intervalos abertos omitidos:

$$0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \ldots$$

Mas K não se reduz a estes pontos. De fato, os pontos de $[0,1]$ pertencentes a K podem ser caracterizados do seguinte modo. Considere a representação de $x, 0 \leq x \leq 1$, como frações ternárias

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \cdots,$$

onde os números a_n podem assumir os valores $0, 1$ ou 2. Alguns números admitem uma dupla representação. Por exemplo,

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3} = \frac{0}{3^2} + \cdots + \frac{9}{3^n} \cdots = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} \cdots.$$

É fácil ver que a K pertencem aqueles, e somente aqueles números $x, 0 \leq x \leq 1$, que admitem ao menos uma representação ternária na qual $a_1 \neq 1, \forall i$.

Assim, a cada $x \in K$ corresponde uma sequência (a_n), onde $a_n = 0$ ou 2.

Observamos que que o conjunto de todas tais sequências é não enumerável, pois dada uma sequência (a_n) de 0 e 2 definimos (b_n) tomando $b_n = 0$ quando $a_n = 0$ e $b_n = 1$ quando $a_n = 2$. Se tomarmos a sequência (b_n) como uma representação de um número $y, 0 \leq y \leq 1$, obteremos uma sobrejeção de K sobre o intervalo $[0, 1]$. Segue que K é não enumerável. (Esta sobrejeção não é uma bijeção.)

Os pontos de K que são extremos de intervalos abertos omitidos são chamados de pontos de primeira espécie, os demais são chamados de segunda espécie.

Voltando a função de Cantor. Comecemos por definir g sobre os intervalos adjacentes, tomando

$$g(t) = \frac{2k-1}{2^n},$$

se $k = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}$, sobre o k-esimo intervalo de ordem n, incluindo-se as extremidades (os intervalos são numerados da esquerda para a direita).

Logo,

$$g(t) = \frac{1}{2}, \text{ se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}, \text{ se } \frac{1}{9} \leq t \leq \frac{2}{9} \\ \frac{3}{4}, \text{ se } \frac{7}{9} \leq t \leq \frac{8}{9} \end{cases},$$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}, \text{ se } \frac{2}{27} \leq t \leq \frac{3}{27} \\ \frac{3}{8}, \text{ se } \frac{7}{27} \leq t \leq \frac{8}{27} \\ \frac{5}{8}, \text{ se } \frac{19}{27} \leq t \leq \frac{20}{27} \\ \frac{7}{8}, \text{ se } \frac{25}{27} \leq t \leq \frac{26}{27} \end{cases}$$

e assim por diante.

Enfin,

$$g(t) = \frac{2k-1}{2^n},$$

se t pertence ao intervalo $[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]$.

A função g está definida sobre todos os pontos de $[0,1]$, exceto os pontos de segunda espécie do conjunto de Cantor (a saber os pontos que não pertencem a intervalos adjacentes ao conjunto de Cantor e não coincidem com nenhuma das extremidades destes intervalos). Seja t^* um destes pontos e seja (t_n) uma sequência crescente de pontos de primeira espécie convergindo para t^*. Então, existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} g(t_n).$$

Do mesmo modo, existe

$$\lim_{n\to\infty} g(t_n^{'}),$$

onde (t_n') é uma sequência decrescente de pontos de primeira espécie convergindo para t^*. Como os limites laterais coicidem, definimos $g(t^*)$ por um destes valores:

$$g(t^*) = \lim_{n\to\infty} g(t_n) = \lim_{n\to\infty} g(t_n^{'}).$$

Obtemos assim uma função monótona e contínua em $[0,1]$ chamada a **escada de Cantor**. A derivada dela será nula em todos os pontos dos intervalos adjacentes.

Resumindo:

g é definida em todo o $[0,1]$. g não é constante.
g é não decrescente. g é contínua em $[0,1]$.
g é derivável em $[0,1]$. g' é nula em todo ponto interior de $[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]$

G. Exemplo devido a Waerden (1930). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} |t|, \text{ se } \; -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(t+n), \; \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Assim o gráfico de f consiste de uma sequência de segmentos de reta. Para cada inteiro não negativo n, defina f_n por

$$f_n(t) = 4^n f(4^n t).$$

Então o gráfico de f_n consiste de uma sequência de segmentos de reta tendo inclinação ± 1. Note que $f_n(t + 4^{-n}) = f_n(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $n \geq 0$. Claramente, f_n é contínua sobre $\mathbb{R}$ para todo n. Como $|f_n(t)| \leq \frac{1}{2}4^{-n}$, vemos que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

converge uniformemente sobre $\mathbb{R}$ (pelo teste M de Weierstrass) e portantoo $g = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ é contínua sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 42 *A função definida acima g não é diferenciável em ponto algum de* $\mathbb{R}$.

Demonstração: Tome $t \in \mathbb{R}$ fixo. Para cada n, escolha $h_n = \pm 4^{-n-1}$, com o sinal escolhido tal que $4^n t$ e $4^n(t + h_n)$ pertençam ao mesmo intervalo $\left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$. Então temos que

$$f_n(t + h_n) - f_n(t) = \pm h_n,$$

e de fato,

$$f_m(t + h_n) - f_m(h_n) = \pm h_n,$$

para $m \leq n$, mas $f(t + h_n) = f_m(t)$ para todo $m\, n$. Portanto, temos

$$\frac{g(t + h_n) - g(t)}{h_n} = \sum_{m=0}^{n} \frac{f_m(t + h_n) - f_m(t)}{h_n} = \sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m,$$

onde $\varepsilon_m = \pm$ para $m = 0, 1, \ldots, n$. Assim, o quociente da diferença

$$\frac{g(t + h_n) - g(t)}{h_n} = \sum_{m=0}^{n} \frac{f_m(t + h_n) - f_m(t)}{h_n}$$

é um inteiro ímpar quando n é par e um inteiro par quando n é impar. Como h_n tende a zero quando $n \to \infty$ segue assim a derivada $g'(t)$ não pode existir.

■

Capítulo 6

O Método da bissecção

Tendo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfazendo $f(a)f(b) < 0$, o método da bissecção consiste em dividir o intervalo $[a,b]$ ao meio, obtendo os subintervalos $[a,m]$ e $[m,b]$, onde $m = \frac{a+b}{2}$ e considerar como novo intervalo de busca um dos dois intervalos em que f tem sinais opostos nos extremos.

Em seguida repete-se o procedimento com o subintervalo escolhido da bissecção deste. Após um número finito de subdivisões ou encontramos uma solução ou sabemos que a raiz encontra-se em algum subintervalo $[a_k, b_k]$.

A demonstração se baseia na construção de intervalos encaixados construídos do seguinte modo Consideremos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(a)f(b) < 0$. Seja $m = \frac{a+b}{2}$ o ponto médio de $[a,b]$. Note que se $f(a)f(m) < 0$, então o teorema do valor intermediário garante que a raiz se encontra no intervalo $[a,m]$. Neste caso, para o próximo passo devemos escolher $[a,m]$ (o subintervalo à esquerda de m).

Se $f(a)f(m) > 0$, multiplicamos essa desigualdade por $f(a)f(b)$ e então temos que $f(a)f(m)f(a)f(b) = [f(a)]^2 f(m)f(b) < 0$, pois $[f(a)]^2 > 0$. Segue que $f(m)f(b) < 0$ e, portanto, pelo teorema do valor intermediário, a raiz se encontra no intervalo $[m,b]$. Neste caso, para o próximo passo devemos escolher $[m,b]$ (o subintervalo à direita de m). Note que a medida que avançamos no método da bissecção, o comprimento de cada subintervalo é metade do intervalo anterior.

Chamando $a_0 = a$ e $b_0 = b$ e efetuando sucessivas bissecções, obtemos intervalos $[a_k, b_k]$ e pontos médios m_k. Note que $|b_k - a_k| = b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k} \to 0$ quando $k \to \infty$.

6.1 Método prático

Uma maneira prática para utilizar o método da bissecção é organizar da forma apresentada a seguir para a função $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin(x)$, ($x$ sempre em radianos).

Note que $f(x) = 0$ se, e somente se, $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \sin(x)$.

Traçando os dois gráficos, vemos que eles se cruzam perto de $x = 2$. Logo, existe uma solução perto de $x = 2$. Veja a figura 1. Como $f(1.5)f(2) < 0$, pelo teorema do valor intermediário f tem uma raiz no intervalo $[1.5; 2]$.

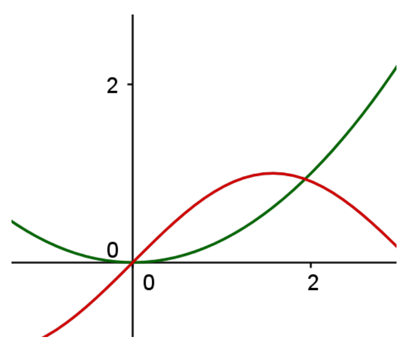


Figura 1: Gráfico de $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ e $\sin(x)$ se cruzam na solução.

• **Exemplo 5** Vamos determinar uma aproximação positiva para a solução no intervalo $[1.5; 2]$ da equação $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - \sin(x) = 0$, x em radianos, pelo método da bissecção. Veja a tabela 6.1.

Assim, uma aproximação para a raiz procurada é $m_5 = 1.921875$. Continuando o processo podemos refinar a solução. Após 20 iterações obtemos a aproximação
$m_{20} = 1.933753728866577$ e $f(1.933753728866577) = -4.48 \times 10^{-8}$.

Tabela 6.1: Tabela para bissecção

k	a_k	b_k	m_k	$f(a_k)f(m_k)$
1	1.5	2.0	1.75	>0 o intervalo escolhido é $[m_k, b_k]$
2	1.75	2.0	1.875	>0
3	1.875	2.0	1.9375	<0 o intervalo escolhido é $[a_k, m_k]$
4	1.875	1.9375	1.90625	>0 o intervalo escolhido é $[m_k, b_k]$
5	1.90625	1.9375	1.921875	>0

6.2 Por que o método funciona?

O método da bissecção gera sempre uma sequência que converge para a solução. De fato, o método gera uma sequência de intervalos encaixados $I_0 = [a_0, b_0] \supset I_1 = [a_1, b_1] \supset I_2 = [a_2, b_2] \supset \ldots \supset I_k = [a_k, b_k] \supset \ldots$. Os extremos a_k dos intervalos compõem uma sequência monótona não decrescente limitada superiormente por b; portanto convergente. Os extremos b_k dos intervalos compõem uma sequência monótona não crescente limitada inferiormente por a, portanto convergente.

Como $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$ temos que

$$0 = \lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} b_k - \lim_{k\to\infty} a_k.$$

Segue que $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} a_k = L$. Isto é, ambas convergem para o mesmo limite L.

Agora mostraremos que L é raiz de $f(x)$. Como em cada passo tem-se $f(a_k)f(b_k) < 0$, então

$$0 \geq \lim_{k\to\infty} f(a_k)f(b_k) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) \lim_{k\to\infty} f(b_k) = [f(L)]^2 \geq 0.$$

Segue que $f(L) = 0$.

Acabamos por demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 43 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(a)f(b) < 0$. O método da* *bissecção gera uma sequência (m_k) que converge para a raiz c de f e satisfaz*

$$|m_k - c| \leq |b_k - a_k| \leq \frac{b-a}{2^k}, k \geq 1. \tag{6.1}$$

6.3 Estimativa para o número de iterações

É importante observar que se estamos procurando por uma aproximação para a raiz da equação com erro máximo ε, o fator $\frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$ pode ser utilizado como critério de parada. O ponto médio m_k de $[a_k, b_k]$ é um candidato a solução e satisfaz $|b_k - m_k| \leq |b_k - a_k| \leq \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$ e, do mesmo modo, $|a_k - m_k| \leq |b_k - a_k| \leq \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$.

Uma aproximação para a solução é um ponto em $[a_k, b_k]$ e como $|a_k - m_k| \leq \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$, isolando k temos:

$$k > \frac{\ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\ln 2} \text{ ou equivalentemente, } k > \frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon)}{\ln 2}. \tag{6.2}$$

Vejamos um exemplo.

• **Exemplo 6** Usando a desigualdade 6.2 podemos determinar quantas iterações do método da bissecção devemos realizar para obter uma aproximação da solução de $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin(x) = 0$ no intervalo $[1.5, 2]$, com erro menor do que 10^{-3}.

De fato, como

$$k > \frac{\ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\ln 2} = \frac{\ln(\frac{2-1.5}{10^{-3}})}{\ln 2} \approx 8.96.$$

Segue que devemos realizar pelo menos 9 iterações do método da bissecção.

O seguinte procedimento em Maple pode ser utilizado para obter aproximação para a solução de $f(x) = 0$, basta entrar com a função, com os extremos do intervalo $[a, b]$ e com o número de iterações.

6.4 O método da bissecção em Maple

```
bisseccao:=proc(f,a,b,n)
    # argumentos: f=funcao
    # a,b  extremos do intervalo [a,b]
    # n=numero de bisseccoes
    local A, B, m, k:  # variaveis locais
    A:=a;
    B:=b;
 if A-B=0 then ERROR(‘a‘,A=‘b‘,B);
 fi;
 for k from 1 to n do
    m[k]:=evalf( (A+B)/2 );
    if evalf( f(A)*f(m[k]) )>0 then A:=c[k]
 elif evalf( f(A)*f(m[k]) )=0 then ERROR(‘f(A)*f(B)=0‘)
    else B:=m[k]
    fi
 od;
    print( ‘Raiz aproximada após‘,n,‘bissecções:‘ );
    print( evalf(m[n]) );
 end:
```

Referências Bibliográficas

[1] DE FIGUEIREDO, D. G., **Análise I**. Rio de Janeiro: L.T.C., 1995.

[2] S. D. CONTE. *Elementary Numerical Analysis*. MacGraw-Hill, 1965.