financeiro1

March 2, 2021

1 Matemática Financeira com Python

Doherty Andrade – www.metodosnumericos.com.br

2 0. Introdução

Quando tratamos de matemática financeira precisamos nos ater a dois tipos de juros: os juros simples e o juros compostos.

Juros é um tipo de aluguel que se paga pelo dinheiro tomado emprestado. Os juros simples e os juros compostos são duas formas diferentes de remunerar o capital.

Juros Simples

O valor dos juros simples J a serem pagos quando se toma um capital C emprestado a uma taxa de i% por n períodos é dado por

$$J = Cin.$$

Desta expressão deduzimos outras:

$$C = \frac{J}{in},$$

$$i = \frac{J}{Cn}.$$

O montante é o valor que se obtém da soma do capital com o juros: $M = C + J$. Como $ J = Cin$, então temos que

$$M = C + cin = C(1 + in).$$

Logo, temos que

$$M = C(1 + in).$$

Juros compostos

Chamamos de juros compostos quando o juro incorpora-se ao capital, para formar a base de cálculo do juro para o período seguinte. É o chamado juros sobre juros. Na prática, nas relações comerciais e financeiras, utiliza-se os juros compostos.

O dinheiro é considerado sempre um bem variável no tempo. Isto quer dizer que um valor hoje V_0 é diferente do mesmo valor daqui um tempo t, V_t. Portanto, não faz sentido somar V_0 com V_t. Para realizar esta operação devemos colocar ambos na mesma data, chamada de data focal focal. Isto é sempre respeitado nas operações financeiras.

Vamos trabalhar um pouco mais com os juros compostos em um problema prático na próxima seção.

3 1. Regime de capitalização composta

O regime de capitalização composta é um processo de cálculo financeiro em que o juro incorpora-se ao capital, para formar a base de cálculo do juro para o período seguinte. É o chamado juros sobre juros.

Consideremos um capital inicial C localizado na data focal 0, uma unidade de período de tempo (chamada de período de capitalização) e uma taxa i de juro efetiva em um período de tempo. Assim, temos o fluxo de montantes nas respectivas datas

$$\begin{aligned} M_1 &= C + J = C + Ci = C(1+i) \quad (1)\\ M_2 &= M_1 + J = M_1 + M_1 i = M_1(1+i) = C(1+i)^2 \quad (2)\\ ..... &= .... \quad (3)\\ M_n &= M_{n-1} + J = C(1+i)^n. \quad (4) \end{aligned}$$

Assim, o montante auferido ao final de n períodos por um capital C colocados a juros à taxa de i% é dado por

$$M_n = C(1+i)^n.$$

Note desta equação podemos obter outras relações. Por exemplo,

$$C = \frac{M}{(1+i)^n},$$

$$J = C\left[(1+i)^n - 1\right],$$

$$i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Para iniciarmos com as nossas contas vamos importar as bibliotecas que precisaremos.

```
In [1]: import numpy as np
        import sympy as sp
        import scipy as sc
        import pandas as pd
        import matplotlib.pyplot as plt
        from sympy import Symbol, sin, cos, exp
```

3.0.1 Exemplo 1

Como exemplo, vamos considerar uma aplicação com capital inicial de R$ 1.400,00 por um período de 36 meses a uma taxa de 2% ao mês pelo regime de capitalização a juros compostos. Qual o montante ao final do período?

Basta calcular M.

```
In [2]: C = 1400
        i = 0.02
        n = 36
        M = C*(1+i)**n;

        print("O montante é:", M)
```

```
O montante é: 2855.8422812019876
```

Podemos automatizar o cálculo do montante na seguinte função.

```
In [3]: def RCJC(C,i,n):
            M = C*(1+i)**n;
            print("O montante é:", M)
```

```
In [4]: RCJC(1400,0.02,36)
```

```
O montante é: 2855.8422812019876
```

3.0.2 Exemplo 2

A uma taxa de 2% ao mês, quanto tempo devo aplicar um capital inicial C até que seja triplicado?

Note que resolvendo $M_n = C(1+i)^n$ para n obtemos que

$$n = \frac{\ln(\frac{M}{C})}{\ln(1+i)}.$$

Como devemos ter $M = 3C$ e $i = 0.02$, então temos que

$$n = \frac{\ln(3)}{\ln(1,02)}.$$

```
In [5]: n = np.log(3)/np.log(1.02)
        n
        # portanto, 56 meses já que os periodos de tempo são inteiros.
```

```
Out[5]: 55.47810763878039
```

3.0.3 Observação

Tendo a taxa dada em termos anuais, a seguinte fórmula determina a taxa mensal equivalente:

$$i_{am} = (1+i_{aa})^{\frac{1}{12}} - 1.$$

Por exemplo, a taxa de 4% ao ano corresponde a taxa mensal de 0.3274%.

Para deduzir esta expressão, notemos que devemos determinar a taxa mensal i_m% ao mês para que o capital C renda o mesmo montante M ao final de 12 meses e ao final de um ano com taxa anual i_a%.

Isto é:

$$M = C(1+i_a) = C(1+i_m)^{12}.$$

Simplificando obtemos

$$1 + i_a = (1+i_m)^{12}.$$

Portanto,

$$i_m = (1+i_a)^{\frac{1}{12}} - 1.$$

```
In [6]: i = (1+0.04)**(1/12)-1
        i
```

```
Out[6]: 0.0032737397821989145
```

4 2. Modelo básico de financiamento

Em operaçoes financeiras e comerciais são oferecidos aos consumidores produtos com preço a vista ou para pagamento em parcelas periódicas. O número de parcelas e o período são variáveis, dependendo do produto e créditos disponíveis.

Amortizar uma dívida é extingui-la aos poucos ou em prestações. Significa também abater parte da dívida efetuando parte do pagamento. A partes devem combinar se utiliza-se juros simples ou compostos na transação. Em geral, utiliza-se juros compostos.

O valor das prestações incluem os juros cobrados pelo financiamento e o valor pago na amortização.

4.0.1 Exemplo 3

Vejamos um exemplo. Uma pessoa tomou emprestado a quantia de R$100.000,00 a ser paga em 6 meses a uma taxa de 3% ao mês.

(a) Pelo regime de capitalização a juros simples ao final de 6 meses a dívida será de

$$M = C(1 + i \times n) = 100.000(1 + 0.03 \times 6) = 118.000,00.$$

(b) Pelo regime de capitalização a juros compostos ao final de 6 meses a dívida será de

$$M = C(1 + i)^n = 100.000(1 + 0.03)^6 = 119.405,23.$$

Em cada um dos casos, este valor deve ser pago ao final do sexto mês.

É comum tanto no comércio quanto em instituições financeiras utilizar juros compostos e que o montante seja dividido em partes iguais; neste caso, cada parcela será de $R\$19.917,54$. Convença-se de que esta não é a prática mais justa.

Existem alguns arranjos que podem ser contratados durante as negociações. Suponha que uma dívida foi paga em parcelas iguais $P_1, P_2, \ldots, P_n$ uniformemente distribuídas ao longo do tempo. Classificamos o arranjo combinado em três categorais:

(a) Antecipadas: primeira prestaçao é paga na data focal.

(b) Postecipadas: primeira prestação paga após um período da data focal. Esta opção é a mais utilizada.

(c) Diferidas: primeira prestação com carência depois da data focal.

Postecipadas: primeira prestação paga após um período da data focal. Esta opção é a mais utilizada sendo que o valor a ser financiado é o valor

$$F = (Preo\ a\ vista) - (Entrada),$$

se houver entrada.

4.0.2 Como o dinheiro é um bem variável no tempo,

se F foi pago em parcelas postecipadas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ uniformemente distribuídas ao longo do tempo, deve-se cumprir

$$PV = P_1(1+i)^{-1} + P_2(1+i)^{-2} + \cdots + P_n(1+i)^{-n}$$

sendo i a taxa de juro e n o número de períodos. Note que os diferentes capitais foram puxados para a data focal inicial, por isso o nome PV (valor presente).

No caso geral de n parcelas iguais, teremos que:

$$PV = P\left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-n}\right]$$

que após substituirmos pela soma da PG e simplificar temos

$$\left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-n}\right] = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

O fator

$$FPV = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

é chamado de Fator de valor atual.

Portanto,

$$PV = P\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right).$$

Podemos pensar analogamente, somando os valores futuros, somando os valores na data focal n. Deste modo, temos

$$FV = P + P(1+i) + \cdots + P(1+i)^{n-1}.$$

Agrupando, temos

$$FV = P\left[1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{n-1}\right].$$

O termo entre colchetes é uma progressão geométrica com primeiro termo igual a 1 e razão $q = (1+i)$, cuja soma é igual a

$$FFV = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

termo este chamado de fator de valor futuro.

Logo, o valor futuro é dado por

$$FV = P\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right].$$

Segue que dado o valor da dívida FV, a taxa de juro i e o número de parcelas n, é possível obter o valor de cada parcela P.

Assim, isolando P, temos que

$$P = FV\left(\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right).$$

4.0.3 Exemplo 4

Como exemplo, veja o caso de um financiamento de $R\$12.000,00$, sem entrada a ser pago em 5 parcelas iguais a uma taxa de 3% ao mês. Vamos determinar o valor das prestações usando o modelo de financiamento de parcelas postecipadas.

```
In [7]: P = 12000*((1-(1+0.03)**(-5))/0.03)**(-1)
        print('o valor da prestação é:', P)
```

```
o valor da prestação é: 2620.25485680691
```

Exemplo 5 Vejamos um exemplo: um objeto foi comprado e deve ser paga em 5 parcelas fixas mensais de R$6.000,00 sem entrada. Utilizando o modelo de prestações fixas Postecipadas com taxa de juro de 2% ao mês, determine o valor financiado.

Devemos determinar o valor F. Veja as contas a seguir.

```
In [8]: F = 6000*((1-(1+0.02)**(-5))/0.02)
        print("O valor a ser financiado é:", F)
```

```
O valor a ser financiado é: 28280.75705102525
```

4.0.4 Exemplo 6

Vejamos um exemplo. Uma loja oferece um bem à vista por R$28.280,76 ou em 5 prestações fixas postecipadas, sem entrada, com taxa de 2% a mês. Qual o valor de cada parcela?

Devemos determinar o valor de P.

```
In [9]: P = 28280.76*((1-(1+0.02)**(-5))/0.02)**(-1)
        print('o valor da prestação é:', P)
```

```
o valor da prestação é: 6000.000625649746
```

Podemos deixar as contas automatizadas criando um função. Veja o exemplo abaixo.

Pra usar basta executar.

```
In [10]: def prestacao(pv,i,n):
             i = i*0.01
             return pv*((i*(1+i)**n)/(((1+i)**n)-1))


         c = float(input("Entre com o valor financiado : "))
         i = float(input("Entre com a taxa de juros (a.m) %: "))
         n = float(input("Período em meses é :" ) )

         print("O valor da prestacao é :" ,   prestacao(c,i,n))
```

```
Entre com o valor financiado : 28281.76
Entre com a taxa de juros (a.m) %: 2
Período em meses é :5
O valor da prestacao é : 6000.212784043855
```

```
In [ ]:
```