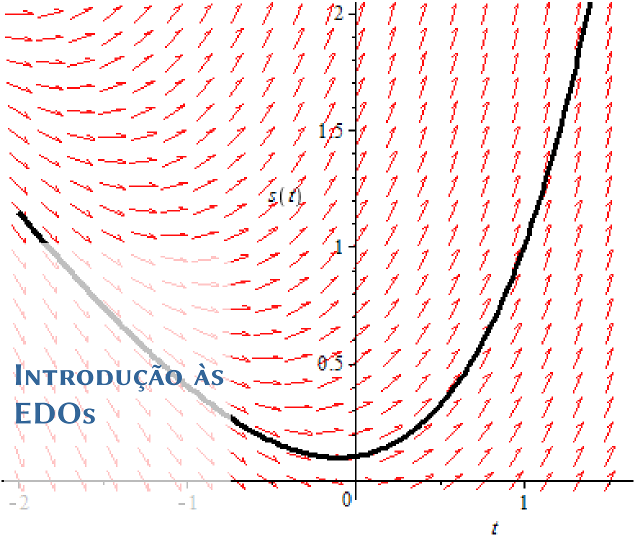
,



Introdução às EDOs

Prof. Doherty Andrade–
doherty200@hotmail.com

Sumário

Introdução

Nestas notas estudamos os rudimentos das equações diferenciais ordinárias (EDO). Apresentamos o teorema de existência e unicidade de soluções para EDO's de primeira ordem. Estudamos também as EDO's lineares de segunda ordem e alguns métodos de solução tais como método dos coeficientes a determinar e o método da variação dos parâmetros. E no final, apresentamos algumas aplicações.

Capítulo 1

EDOs de primeira Ordem

1.1 Introdução

Uma equação diferencial ordinária, EDO, é uma equação que envolve uma função incógnita $y(x)$ e suas derivadas. Por exemplo:

(a) $y''(x) + xy'(x) + y(x) = \cos(x)$.

(b) $\frac{dy}{dx} + y(x) = x$.

(c) $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

(d) $y'''(x) + \cos(x)y'(x) = \sin(x)$.

A ordem de uma EDO é a ordem da mais alta derivada da função incógnita que aparece na equação.

No exemplo acima,
(a) é uma EDO de ordem 2,
(b) e (c) são de ordem 1, e (d) de ordem 3.

Uma solução de uma EDO é uma função $y(x)$ que juntamente com suas derivadas satisfazem à equação.

(a) A EDO $y''(x) + y(x) = 0$ tem $y(x) = c\sin(x)$ como uma solução, onde $c \in \mathbb{R}$. Note que $y(x) = c\cos(x)$ e $y(x) \equiv 0$ também são soluções.

(b) $\frac{dy}{dx} = y(x)$ tem $y(x) = c\mathrm{e}^x$ como uma solução, onde $c \in \mathbb{R}$.

1.2 *EDOs de primeira ordem*

Consideremos uma EDO de primeira ordem da forma

$$y'(x) = f(x, y(x)), \tag{1.1}$$

onde $f(x, y)$ é uma função contínua.

Uma forma de visualizar suas possíveis soluções é por meio do seu campo de direções ou campo de inclinações. Desenhamos o campo de direções da EDO (1.1) marcando à partir do ponto (x, y) do plano o segmento orientado m $(x, f(x, y))$.

O campo de direções da EDO $y'(x) = x + y$ pode ser visualizado na figura a seguir:

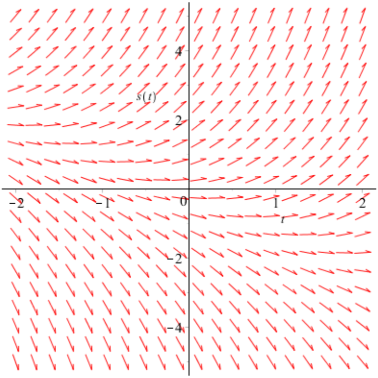


Figura 1.1: *Campo de direções de* $y' = x + y$

Para visualizar uma solução que passa pelo ponto (x_0, y_0) deve-se traçar uma curva passando por esse ponto e que tenha os segmentos do campo de direções como tangentes. A figura ilustra esse caso com $(1, 1)$.

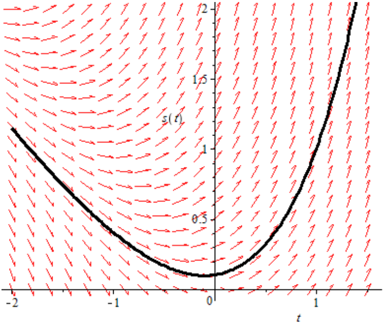


Figura 1.2: *Solução de* $y' = x + y$ *passando por* $(1, 1)$

1.3 *Equações de primeira ordem do tipo separável*

São EDOs da forma

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{g(x)}{h(y)}, \tag{1.2}$$

onde $h(y) \neq 0$ para todo y. Esse tipo de EDO pode ser escrito como

$$h(y)dy = g(x)dx.$$

Que pode ser resolvida por integração.

Como exemplo, se $\dfrac{dy}{dx}(x) = \dfrac{-4x}{9y}$, então $9ydy = -4xdx$. Integrando ambos os lados, otemos

$$4x^2 + 9y^2 = c.$$

Assim, y é dado implicitamente.

1.4 EDOs lineares de primeira ordem

As EDOs lineares de primeira ordem são da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{1.3}$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são funções contínuas e de variável x.

O principal resultado sobre existência de soluções para EDOs é apresentado pelo teorema a seguir.

Teorema 1 *(Existência e Unicidade) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ função contínua com $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ também contínua. Dado $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto $I \ni x_0$ e uma única função diferenciável $\varphi : I \to \mathbb{R}$ com $(x, \varphi(x)) \in \Omega$ para todo $x \in I$, que é solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

A partir de agora, vamos consideremos o problema de valor inicial (PVI) dado por

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Já sabemos em que condições o PVI tem solução. A solução desse tipo de PVI é dada por meio do fator integrante da EDO (1.3)

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int P(x)dx}. \tag{1.6}$$

A solução do PVI (1.5) é dada por:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\mu(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} \mu(s)Q(s)ds\right]. \tag{1.7}$$

- **Exemplo 2**

Considere o PVI

$$\begin{cases} y'(x) + y = x \\ y(1) = 2. \end{cases} \tag{1.8}$$

O fator integrante da EDO é

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int P(x)dx} = \mathrm{e}^{\int 1dx} = \mathrm{e}^{x}.$$

Como $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$, segue da expressão (1.7) que

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\mu(x)}\left[\mu(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} \mu(s)Q(s)ds\right]. \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^x}\left[\mathrm{e}2 + \int_1^x \mathrm{e}^s s ds\right]. \\ &= \mathrm{e}^{-x}\left[2\mathrm{e} + (x-1)\mathrm{e}^x\right] \\ &= 2\mathrm{e}^{1-x} + x - 1. \end{aligned}$$

Exercícios 3

Determinar as soluções dos PVIs.

1. $\begin{cases} x^2y'(x) + xy = 1 \\ y(1) = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y'(x) + 2xy = 1 \\ y(1) = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4y'(x) + 12y = 60 \\ y(0) = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4y'(x) + 12y = 60\sin(30x) \\ y(0) = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y'(x) + y = -x \\ y(1) = 2. \end{cases}$

Capítulo 2

EDOS's de segunda Ordem Lineares

2.1 Introdução

Uma EDO de segunda ordem linear tem a forma

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x) \tag{2.1}$$

onde P, Q, R e G são funções contínuas apenas de variável x.

Quando a função G acima é a função nula, a EDO acima se chama EDO de segunda ordem linear homogênea associada a EDO (2.1)

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0. \tag{2.2}$$

As EDOs homogênas associadas desempenham um papel importante nos métodos de solução das EDOs não homogêneas.

Teorema 4 *Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções da equação (2.2), C_1 e C_2 são constantes reais, então*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

é também solução da EDO homogênea associada (2.2).

Teorema 5 *Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções linearmente independentes em um intervalo da equação (2.2), e $P(x)$ nunca se anula, então a solução geral será dada por*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

para quaisquer constantes reais C_1 e C_2.

Este teorema é muito útil, pois diz que se conhecemos duas soluções particulares linearmente independentes, então conheceremos **todas** as soluções.

2.2 EDOS's de segunda ordem lineares, homogêneas a coeficientes constantes

Nesta seção vamos aprender como resolver EDO's de segunda ordem homogêneas lineares a coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2.3}$$

onde $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$.

Se $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$ for solução da EDO (2.3), então substituindo, temos

$$ar^2\mathrm{e}^{rx} + br\mathrm{e}^{rx} + c\mathrm{e}^{rx} = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) = 0.$$

Como $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$ nunca se anula, segue que

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2.4}$$

Esta equação do segundo grau se chama equação auxiliar ou característica da EDO.

Assim, se r for raiz da equação auxiliar, então $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$ é uma solução da EDO homogênea.

As soluções dessa equação do segundo grau podem ser:

1. Duas raízes reais e distintas: $r_1 \neq r_2$.

2. Duas raízes reais e iguais: $r_1 = r_2 = r$.

3. Duas raízes complexas: $r_1 = \alpha + \beta i$ e $r_2 = \alpha - \beta i$.

A solução geral da EDO homogênea é dada em função das raízes da segundo grau auxiliar.

1^o. caso: Se as duas raízes são reais e distintas: $r_1 \neq r_2$. Aplicando o teorema 5, a solução geral será:

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais.

2^o. caso: Se as duas raízes são reais e iguais: $r_1 = r_2 = r$. Aplicando o teorema 5, a solução geral será:

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais.

3^o. caso: Se as duas raízes são complexas: $r_1 = \alpha + \beta i$ e $r_2 = \alpha - \beta i$. Aplicando o teorema 5, a solução geral será:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais.

2.3 Exemplos

1^o. Exemplo: duas raízes reais e distintas: Considere a EDO $y'' + y' - 6y = 0$. A equação de segundo grau auxiliar é $r^2 + r - 6 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = -3$. Segue que a solução geral será:

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-3x}$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais.

2^o. Exemplo: duas raízes reais e iguais:
Considere a EDO $4y'' + 12y' + 9y = 0$. A equação de segundo grau auxiliar é $4r^2 + 12r + 9 = 0$, cujas raízes são $r_1 = r_2 = \frac{-3}{2}$. Segue que a solução geral será:

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\frac{-3}{2}x} + C_2 x \mathrm{e}^{\frac{-3}{2}x}$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais.

3^o. Exemplo: duas raízes complexas:
Considere a EDO $y'' - 6y' + 13y = 0$. A equação de segundo grau auxiliar é $r^2 - 6r + 13 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 3 + 2i$ e $r_2 = 3 - 2i$. Segue que a solução geral será:

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{3x} \cos(2x) + C_2 \mathrm{e}^{3x} \sin(2x)$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais.

Conhecendo-se as condições iniciais, podemos determinar as constantes C_1 e C_2.

Exercícios 6

Determinar as soluções dos PVI e PVFs.

1. $$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + 10y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 2y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} my''(x) + ky = 0, \text{m>0,k>0} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} y''(x) - 2y' + 1y = 0, \\ y(0) = 0 \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

2.4 EDOS's de segunda ordem lineares não homogêneas a coeficientes constantes

Nesta seção vamos aprender como resolver EDO's de segunda ordem lineares não homogêneas a coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = G(x) \tag{2.5}$$

onde $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ e G uma função contínua.

Vamos precisar ainda da equação homogênea associada:

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2.6}$$

que desempenha um papel importante na obtenção da solução da equação (2.5).

Teorema 7 *Seja $y_p(x)$ uma solução particular da equação (2.5). Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes (LI) da EDO homogênea associada (2.6), então a solução geral da EDO (2.5) é dada por:*

$$y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais.

Portanto, para achar a solução geral da EDO não homogênea (2.5) precisamos de uma solução particular da não homogênea e de duas soluções LI da EDO homogênea associada (2.6).

2.5 Método dos coeficientes a determinar

Este método é indicado para resolver EDO's lineares de segunda ordem a coeficientes constantes não-homogêneas em que $G(x)$ assume as seguintes formas:

1^o. caso: $G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, um polinômio.
Neste caso, devemos procurar uma solução particular da forma

$$y(x) = x^s(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n),$$

onde $s \geq 0$ é o menor inteiro que garanta que nenhuma parcela de y_p seja solução da equação da homogênea associada. Os coeficientes $A_0, A_1, \ldots, A_n$ são coeficientes a serem determinados obrigando que y_p seja solução particular de (2.5).

2^o. caso: $G(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)\mathrm{e}^{rx}$, um polinômio multiplicado por uma exponencial.
Neste caso, devemos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = x^s(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n)\mathrm{e}^{rx},$$

onde $s \geq 0$ é o menor inteiro que garanta que nenhuma parcela de y_p seja solução da equação da homogênea associada, onde os coeficientes $r, A_0, A_1, \ldots, A_n$ são coeficientes a serem determinados obrigando que y_p seja solução particular de (2.5).

3^o. caso: $G(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ou $G(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$, um polinômio multiplicado por uma exponencial e por um cosseno ou um seno.

Neste caso, devemos procurar uma solução particular da forma

$$y(x) = x^s(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

$$+x^s(B_0 + B_1x + \cdots + B_nx^n)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

onde $s \geq 0$ é o menor inteiro que garanta que nenhuma parcela de y_p seja solução da equação da homogênea associada. Os coeficientes $\alpha, \beta, A_0, A_1, \ldots, A_n, B_0, B_1, \ldots, B_n$ são coeficientes a serem determinados obrigando que y_p seja solução particular de (2.5).

2.6 Exemplo 1

Determinar a solução de

$$y'' + y' = 2 + x^2.$$

Este exemplo se encaixa no primeiro caso.

1^o. passo: determinar a solução geral da homogênea associada: $y'' + y' = 0$.

Como as raízes de $r^2 + r = 0$ são $r_1 = 0$ e $r_2 = -1$, a solução geral da EDO homogênea associada é

$$y(x) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-x}.$$

2^o. passo: determinar a solução particular da não homogênea.

Como $g(x) = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)$, um polinônmio, vamos procurar uma solução particular y_p da forma

$$y_p(x) = x(A_0 + A_1 x + A_2 x^2)$$

$$y(x) = A_0 x + A_1 x^2 + A_2 x^3,$$

aqui o valor de s é $s = 1$, pois para $s = 0$ a parcela A_0 é solução solução da homogênea.

3^o. passo: Determinar os coeficientes e apresentar a solução.

Derivando a solução particular e substituindo na EDO não homogênea:

$$\begin{aligned} y_p'(x) = &= A_0 + 2A_1x + 3A_2x^2 \\ y_p''(x) = &= 2A_1 + 6A_2x. \end{aligned}$$

Substiuindo na EDO nao homogênea e ordenando:

$$(2A_1 + 6A_2x) + \left(A_0 + 2A_1x + 3A_2x^2\right) = 2 + x^2$$

$$(2A_1 + A_0) + (6A_2 + 2A_1)\, x + 3A_2x^2 = 2 + x^2$$

Comparando os polinômios, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2A_1 + A_0 = 2 \\ 6A_2 + 2A_1 = 0 \\ 3A_2 = 1. \end{cases}$$

Cuja solução do sistema é $A_0 = 4$, $A_1 = -1$ e $A_2 = \frac{1}{3}$. Assim, a solução particular é:

$$y_p(x) = 4x - x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Segue que a solução geral da EDO não homogênea é:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + 4x - x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

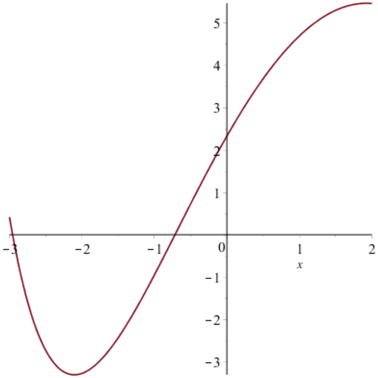


Figura 2.1: *Gráfico da solução do Exemplo 1 com* $C_1 = C_2 = 1$

2.7 Exemplo 2

Determinar a solução de

$$y'' + 2y' + y = (2 + x)e^{-x}.$$

Este exemplo se encaixa no segundo caso.

1^o. passo: determinar a solução geral da homogênea associada: $y'' + 2y' + y = 0$.

Como as raízes de $r^2 + 2r + 1 = 0$ são reais e iguais a $r_1 = r_2 = -1$, a solução geral da EDO homogênea associada é

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 x \mathrm{e}^{-x}.$$

2^o. passo: determinar a solução particular da não homogênea.

Como $g(x) = (A_0 + A_1 x)\mathrm{e}^{-x}$, um polinômio vezes uma exponencial, vamos procurar uma solução particular y_p da forma

$$y_p(x) = x^2(A_0 + A_1 x)\mathrm{e}^{-x} = A_0 x^2 \mathrm{e}^{-x} + A_1 x^3 \mathrm{e}^{-x},$$

aqui o valor de s é $s = 2$, pois para $s = 0$ as parcela $A_0 \mathrm{e}^{-x}$ e $A_0 x \mathrm{e}^{-x}$ são soluções e para $s = 1$ a parcela $A_0 x \mathrm{e}^{-x}$ também é solução da homogênea.

3^o. passo: Determinar os coeficientes e apresentar a solução.

Derivando a solução particular e substituindo na EDO não homogênea:

$$y_p'(x) = \left[2A_0x + (3A_1 - A_0)x^2 - A_1x^3\right] \mathrm{e}^{-x}$$

$$y_p''(x) = \left[2A_0 + (6A_1 - 4A_0)x + (A_0 - 6A_1)x^2\right.$$
$$\left. + A_1x^3\right] \mathrm{e}^{-x}.$$

Substiuindo y_p'', y_p' e y_p na EDO não homogênea e ordenando e simplificando, obtemos

$$(2A_0 + 6A_1x)\, \mathrm{e}^{-x} = (2 + x)\mathrm{e}^{-x},$$

de onde

$$2A_0 + 6A_1 = 2 + x.$$

Comparando, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2A_0 = 2 \\ 6A_1 = 1. \end{cases}$$

Cuja solução do sistema é $A_0 = 1$, $A_1 = \frac{1}{6}$. Assim, a solução particular é:

$$y_p(x) = x^2(1 + \frac{1}{6}x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Segue que a solução geral da EDO não homogênea é:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x^2(1 + \frac{1}{6}x)e^{-x}.$$

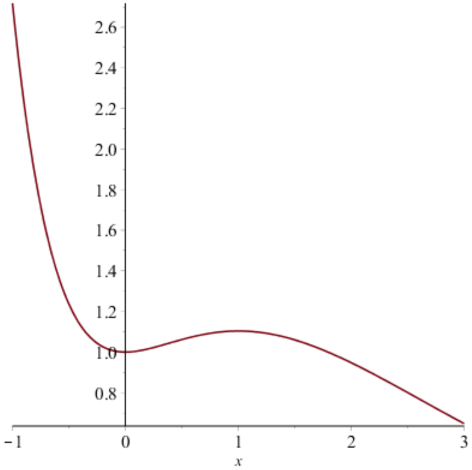


Figura 2.2: *Gráfico da solução do Exemplo 2 com* $C_1 = C_2 = 1$

2.8 Exemplo 3

Determinar a solução de

$$y'' + 2y' + 2y = e^{x}\cos(x).$$

Este exemplo se encaixa no terceiro caso.

1^o. passo: determinar a solução geral da homogênea associada: $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Como as raízes de $r^2 + 2r + 2 = 0$ são complexas a $r_1 = -1 + i, r_2 = -1 - i$, a solução geral da EDO homogênea associada é

$$y(x) = C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x}\sin(x).$$

2^o. passo: determinar a solução particular da não homogênea.

Como $g(x) = \cos(x)e^{x}$, um polinômio vezes uma exponencial vezes cosseno ou seno, vamos procurar uma solução particular y_p da forma

$$y_p(x) = x^0(Ae^{x}\cos(x) + Be^{x}\sin(x)),$$

aqui o valor de s é $s = 0$, pois senhuma parcela de $y_p(x)$ é solução da homogênea.

3^o. passo: Determinar os coeficientes e apresentar a solução.

Derivando a solução particular e substituindo na EDO não homogênea:

$$\begin{aligned} y_p'(x) = &= (A+B)\mathrm{e}^x\cos(x) + (B-A)\mathrm{e}^x\sin(x) \\ y_p''(x) = &= 2B\mathrm{e}^x\cos(x) - 2A\mathrm{e}^x\sin(x). \end{aligned}$$

Substiuindo y_p'', y_p' e y_p na EDO não homogênea e simplificando, obtemos

$$(4A+4B))\,\mathrm{e}^x\cos(x) + (4B-4A)\mathrm{e}^x\sin(x)$$

$$= \mathrm{e}^x\cos(x).$$

Comparando, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} 4A+4B = 1 \\ -4A+4B = 0. \end{cases}$$

Cuja solução do sistema é $A = \frac{1}{8}$, $B = \frac{1}{8}$. Assim, a solução particular é:

$$y_p(x) = \frac{1}{8}\mathrm{e}^x\cos(x) + \frac{1}{8}\mathrm{e}^x\sin(x).$$

Segue que a solução geral da EDO não homogênea é:

$$y(x) = C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x}\sin(x) +$$

$$+\frac{1}{8}e^{x}\cos(x) + \frac{1}{8}e^{x}\sin(x).$$

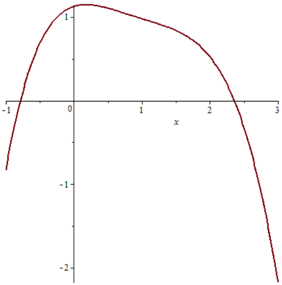


Figura 2.3: *Gráfico da solução do Exemplo 3 com* $C_1 = C_2 = 1$

Exercícios

0. Determinar as soluções das EDOs de ordem 2.

   a) $y'' + y' - 2y = x^2.$

   b) $y'' + y' - 2y = x^2 + 3.$

c) $y'' + 4y = \mathrm{e}^{3x}$.

d) $y'' + 2y' + y = 3\sin(2t)$.

e) $y'' - 4y = x\mathrm{e}^{x} + \cos(2x)$.

2.9 Método da variação dos parâmetros

Suponha que, após resolver a equação homogênea

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{2.7}$$

escrevamos a solução como

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \tag{2.8}$$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes. Vamos substituir as constantes (ou parâmetros) c_1 e c_2 da (2.8) pelas funções arbitrárias e $u_1(x)$ e $u_2(x)$. Assim, procuramos uma solução particular da equação não homogênea

$$ay'' + by' + cy = G(x) \tag{2.9}$$

da forma

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x). \tag{2.10}$$

Esse método é chamado variação dos parâmetros porque variamos os parâmetros.

Pode-se provar que as funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$ devem satisfazer às seguintes condições:

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0 && (2.11)\\ a\left(u_1'y_1' + u_2'y_2'\right) &= G. && (2.12)\end{aligned}$$

Exemplo: determinar a solução da EDO $y'' + y = \sin(x)$.

A EDO homogênea tem equação auxiliar igual a $r^2 + 1 = 0$, cujas soluções são $r_1 = i$ e $r_2 = -i$. Segue que a solução geral da EDO homogênea é

$$y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x),$$

onde c_1 e C_2 são constantes.

Usando o método da variação dos parâmetros, vamos procurar uma solução particular da EDO não homogênea da forma

$$y_p(x) = u_1(x)\cos(x) + u_2(x)\sin(x).$$

Usando o sistema, obtemos de 2.11–2.12

$$\begin{aligned} u_1'\cos(x) + u_2'\sin(x) &= 0 && (2.13)\\ -u_1'\sin(x) + u_2'\cos(x) &= \sin(x) && (2.14)\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{1}{2}+\frac{\cos(2x)}{2} \Rightarrow u_1(x) = -\frac{1}{2}x+\frac{\sin(2x)}{4} \\ u_2' &= \sin(x)\cos(x) \Rightarrow u_2(x) = \frac{\sin^2(x)}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a solução particular $y_p(x)$ é:

$$y_p(x) = \frac{\sin^2(x)}{2}\cos(x) + \left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sin(2x)}{4}\right)\sin(x).$$

Segue que a solução geral da EDO não homogênea é:

$$y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{2}\cos(x) + \\ + \left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sin(2x)}{4}\right)\sin(x).$$

Exercícios 8

Resolva usando o método da variação dos parâmetros.

1. $y'' + y = \tan(x), \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
2. $4y'' + y = \cos(x)$
3. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

Capítulo 3

Aplicações

1. **Crescimento populacional:**
   O modelo mais simples de crescimento populacional baseia-se na hipótese de que a população cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho.

   Se $P(t)$ é a população no instante t, a taxa de crescimento é $\frac{dP}{dt}$. Então, tem-se que:

   $$\frac{dP}{dt} = kP(t),$$

   onde k é a constante de proporcionalidade. Essa constante em geral é determinada pela observação.

   Se $k > 0$ a derivada $\frac{dP}{dt}$ é positiva e, portanto, a população cresce. Se por outro lado, $k < 0$ a derivada

$\frac{dP}{dt}$ é negativa, a população decresce.

Suponha que o valor da população inicial seja P_0. Determine a população em um instante $t > 0$ qualquer. Faça o gráfico da solução em dois casos:
(a) $k > 0$
(b)$k < 0$. Este modelo não é realístico, pois ignora algumas condições tais como oferta de alimento e espaço, morte de indivíduos e etc. Mas o modelo acima pode ser útil para o estudo populações de micro-organismos.

2. Modelo **de crescimento de Verhulst (Logística):** Muitas populações crescem (ou decrescem) exponencialmente até se aproximarem da capacidade de suporte M e depois disso se estabilizam. Um modelo mais realístico deve supor que:

   - $\frac{dP}{dt} \approx kP$, deva ser proporcional a $P\left(t\right)$ se a população é pequena,$k > 0$.
   - $\frac{dP}{dt} < 0$ se $P\left(t\right) > M$.

   O modelo que incorpora essas hipóteses é:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right).$$

Essa EDO é chamada equação diferencial logística e foi proposta pelo matemático e biólogo holandês Pierre-François Verhulst na década de 1840 como um modelo para o crescimento populacional mundial.

Primeiro observamos que $P(t) = 0$ e $P = M$ são soluções da EDO logística. Essas duas soluções são chamadas de soluções de equilíbrio.

Se $P > M$, então $1 - \frac{P}{M} < 0$ e portanto, $\frac{dP}{dt} < 0$ significando que a população decresce.

Se $P < M$, então $1 - \frac{P}{M} > 0$ e portanto, $\frac{dP}{dt} > 0$ significando que a população cresce.

(a) Suponha que $P(0) = 10$ e $M = 20$. Determine a solução $P(t)$ e faça um esboço do seu gráfico. (b) Suponha que $P(0) = 20$ e $M = 10$. Determine a solução $P(t)$ e faça um esboço do seu gráfico.

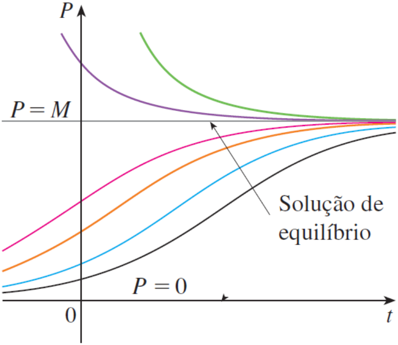


Figura 3.1: *Logística*

Pesquise sobre Malthus e saiba como as EDOs já foram historicamente utilizadas.

3. Uma população tem o seu crescimento modelado pela EDO

$$\frac{dP}{dt} = 1,2P\left(1 - \frac{P}{4200}\right).$$

(a) Para quais valores a população está aumentando?

(b) Para quais valores a população está diminuindo?

(c) Quais as soluções de equilíbrio?

4. **Desintegração radioativa:**
sabe-se que um elemento radioativo se desintegra a uma taxa proporcional à quantidade presente de material. Se $Q(t)$ é quantidade de material radioativo em um instante $t > 0$, então temos que

$$\frac{dQ}{dt} = kQ\left(t\right).$$

O isótopo radioativo tório 234 desintegra-se (claro) a uma taxa proporcional à quantidade presente. Se 100 miligramas deste material são reduzidas a 82,04 miligramas em uma semana, determine a expressão para a quantidade de material presente em qualquer instante . Determine a constante k. Resp.$k = -0,02828$.

Determine também o intervalo de tempo necessário para a massa decair à metade do seu valor inicial.

5. **Datação de carbono:**
Em um pedaço de madeira é encontrado com $\frac{1}{500}$ da quantidade original de carbono 14. Sabe-se que

a meia-vida do carbono 14 é de 5600 anos. Ou seja, em 5600 anos a metade do carbono 14 presente transformou-se em carbono 12. Determinar a idade deste pedaço de madeira. Resp. 50200 anos.

6. **Juro composto:**
Suponha que uma soma em dinheiro S_0 é depositada em um banco que paga juros a uma taxa de 6% ao ano. O valor $S(t)$ do investimento ao final de t anos depende da frequência com o qual o juro é composto. Considere que o juro é composto uma vez ao ano.

Se o juro é composto uma vez ao ano, então

$$S(t) = S_0 (1 + 0,06)^t .$$

Se o juro é composto duas vezes ao ano, então

$$\begin{aligned} S(t) &= S_0 \left[\left(1 + \frac{0,06}{2}\right) \left(1 + \frac{0,06}{2}\right) \right]^t \\ &= S_0 \left(1 + \frac{0,06}{2}\right)^{2t} . \end{aligned}$$

Em geral, se o juro é composto k vezes ao ano,

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{0,06}{k}\right)^{kt} .$$

Vamos aproximar a situação real por um modelo matemático no qual consideramos o juro composto continuamente. Com isso, podemos escrever a lei de crescimento do investimento como uma equação diferencial:

$$S'(t) = 0,06S(t).$$

A solução dessa EDO, sujeita à condição inicial $S(0) = S_0$ é?

7. **Problema químico:**
   Suponha que 100g de açúcar de cana, em água, estão sendo transformados em dextrose a uma razão que é proporcional à quantidade não transformada. Deseja-se saber quanto de açúcar foi transformado após t minutos.

   Seja $Q(t)$ a quantidade, em gramas, convertido em t minutos e k a constante de proporcionalidade. Então, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = k(100 - Q) \\ Q(0) = 0. \end{cases}$$

   Determine a solução $Q(t)$ em um instante t qualquer e no instante $t = 30$ minutos.

8. **Problema de mistura:**
Um tanque contém 100 litros de água salgada. É adicionado, neste tanque, água salgada à razão de 5 litros por minuto, com uma concentração de sal de 2kg/litro. Ao mesmo tempo, a mistura deixa o tanque através de um buraco à mesma taxa. A mistura do tanque é continuamente agitada, de modo a deixar a mistura homogênea. Se inicialmente a mistura contém uma concentração de 1kg/litro, determine a concentração em um instante futuro.

Vamos denotar por $y\,(t)$ a quantidade de sal no tanque após t minutos do instante inicial $t_0 = 0$. Temos que o sal está sendo adicionado ao tanque à razão de $5 \times 2\ kg/min = 10kg/min$ e está saindo à razão de $5\frac{y(t)}{100}kg/min = \frac{y(t)}{20}kg/min$. Assim, temos que a variação da quantidade de sal no tanque é dada por
$$\frac{dy}{dt} = 10 - \frac{y}{20}.$$
Que é uma EDO linear de primeira ordem. Sendo $y(0) = 100$, determine a solução.

Estude a concentração de sal no tanque ao longo do tempo.

9. Um tanque contém 20kg de sal diluído em 5000 litros de água. Água salgada entra no tanque com 0,03kg de sal por litro a uma taxa de 25 litros por minuto. A solução é mistura completamente, de modo a deixar a mistura homogênea, e sai do tanque à mesma taxa. Qual a quantidade de sal que permanece na água após 30 minutos?

   Vamos denotar por $y(t)$ a quantidade de sal, em kg, após t minutos. Sabemos que $y(0) = 20$kg. Queremos calcular $y(30)$.

   Note que a taxa de variação $\frac{dy}{dt}$ é a taxa de variação da quantidade de sal. Assim, $\frac{dy}{dt}$=taxa de entrada - menos taxa de saída.

   A taxa de entrada é:

$$(0,03kg/litro)(25litros/min) = 0,75kg/min.$$

   A taxa de saída é:

$$\left(\frac{y(t)}{5000}\right)\left(25\frac{litros}{min}\right) = \frac{y(t)}{200}\frac{kg}{min}$$

   Logo, temos que

$$\frac{dy}{dt} = 0,75 - \frac{y(t)}{200}.$$

Faça os detalhes finais.

10. **Resfriamento de um corpo:**
Consideremos um modelo simplificado para o resfriamento de um objeto por perda ou ganho de calor para o meio ambiente, fazendo as seguintes hipóteses:

    (a) A temperatura T é a mesma no corpo todo e depende apenas do tempo.

    (b) A temperatura do meio ambiente, T_a, é constante no tempo.

    (c) O fluxo de calor através das paredes do corpo, dado por, $\frac{dT}{dt}$ é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente. Isto é,
$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_a\right),$$

    chamada de lei Newton para o resfriamento, onde k é uma constante positiva que depende das propriedades físicas do material. Supondo que a temperatura inicial do corpo seja conhecida como T_0, determine a temperatura do corpo em um instante qualquer. Observe o comportamento de $T\left(t\right)$ quando:

(i) $T_0 > T_a$;
(ii) $T_0 < T_a$;
(iii) $T_0 = T_a$;
(iv) Em todos os caso, quando $t \to \infty$.

11. **Curva de Aprendizagem:**
Os psicólogos interessados em teoria do aprendizado estudam as curvas de aprendizado. Suponha que $P(t)$ representa o nível de desempenho de alguém aprendendo uma habilidade como uma função do tempo de treinamento t. A derivada $\frac{dP}{dt}$ representa a taxa em que o desempenho melhora. Se M é o nível máximo de desempenho do qual o aprendiz é capaz, explique a razão pela qual a equação diferencial
$$\frac{dP}{dt} = k\left(M - P\right),$$
onde k uma constante positiva, é um modelo razoável para o aprendizado. Se $P\left(0\right) = \frac{M}{2}$ determine a solução supondo que $k = 0,10$.

12. **Circuito elétrico:**
Considere o circuito elétrico, onde R é a resistência, I a corrente elétrica, L o capacitor e E a força eletromotriz.

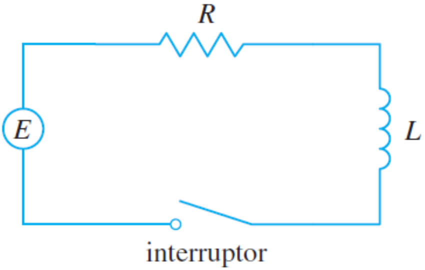


Figura 3.2: *Circuito*

Sabe-se da Lei de Ohm que a queda de potencial através e R é RI, através de L é $L\frac{dI}{dt}$. De acordo com a lei de Kirchhoff, a queda total de potencial no circuito tem que ser contrabalanceada pela força eletromotriz aplicada, e então a corrente em um instante t é dada pela EDO

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

(a) Suponha que L=4, R=12 e E=60 volts e que I(0)=0. Determine a solução em um instante t futuro.

(b) Suponha que L=4, R=12 e E=60sint(30t) volts e que I(0)=0. Determine a solução em um instante t futuro.

13. **Sistema massa–mola:**
Consideremos o movimento de um objeto com massa m preso na extremidade de uma mola vertical fixada na outra extremidade a um suporte no teto. Veja a figura. A lei de Hooke diz que se a mola for esticada x unidades à partir de seu tamanho natural, então ela exerce uma força que é proporcional x. Essa força, chamada de elástica, é, portanto, igual a $-kx$, onde $k > 0$ é a constante de proporcionalidade.

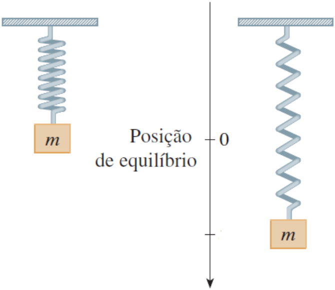


Figura 3.3: *Massa-mola*

Ignorando qualquer força externa de resistência do ar, a segunda lei de Newton nos dá:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Logo, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$. Que é uma EDO de segunda ordem.

Obter a solução desta EDO, com $k = -3$ e as condições iniciais dadas: $x(0) = 0, x'(0) = 0$.

Esboce o gráfico de $x(t)$.

Referências Bibliográficas

[1] KREIDER, D., OSTBERG, D. R., Kuller, R. C., PERKINS, F. W. Introdução a Análise Linear - Equações Diferenciais Lineares, vol.1, Ao Livro Técnico, 1996.

[2] FIGUEIREDO, D. G. Equações Diferenciais Ordinárias. Projeto Euclides. IMPA, CNPq, Livros Técnicos e Científicos, 1977.

[3] KREYSZIG, E.; Matemática superior. 9.ª ed. LTC. 2009.