# Convergência Pontual de Séries de Fourier
# O Teorema de Carleson-Hunt

Doherty Andrade

www.metodosnumericos.com.br

## Sumário



## 1 Histórico

A idéia básica da teoria das séries de Fourier é representar uma dada função 2L-periódica como uma série trigonométrica.

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + \sin(\frac{n\pi x}{L})\right]. \tag{1}$$

Fourier, em sua famosa teoria do calor, publicada em 1822, faz a primeira tentativa para provar que uma função arbitrária $2L$-periódica é igual a uma série trigonométrica particular, que passou a ser chamada "série de Fourier de $f$". Mesmo antes de Fourier muitos matemáticos estiveram ligados ao problema dessa representação. Acredita-se que Euller, por volta de 1777, já conhecesse os coeficientes $a_n$ e $b_n$. Bernoulli, D'Alembert e Lagrange são outros que estudaram esse problema.

A afirmação de Fourier sobre a representação de $f$ por uma série trigonométrica particular é falsa. A justificativa da afirmação de Fourier se baseou em propriedades de duvidosa validade, sendo algumas claramente falsas. Isto provavelmente tenha ocorrido devido ao desconhecimento do conceito atual de funções. Não há duvidas que a surpreendente afirmação de Fourier tenha levantado algumas questões polêmicas e de que a discussão contribuiu para o avanço da Matemática. Dirichlet, usando o conceito atual de função, foi o primeiro a dar, em 1829, uma condição suficiente para a validade da representação em séries. Em 1876 du Bóis-Reymond deu o primeiro exemplo de uma função contínua cuja série de Fourier diverge em um ponto. Esse exemplo foi melhorado posteriormente e du Bóis-Reymond apresentou uma função contínua cuja série de Fourier diverge em $E \subseteq [0, 2\pi]$, com a medida de $E$ positiva. Isto prova que Fourier estava enganado sobre a validade da representação em séries.

Novos exemplos surgiram. Kolmogorov define em 1926 uma função $f \in L^1([0, 2\pi])$, cuja série diverge em todo ponto. Katznelson em 1964, mostra que dado qualquer conjunto $E \subseteq [0, 2\pi]$ com $m(E) = 0$ existe uma função $f$ contínua em $[0, 2\pi]$ cuja série de Fourier diverge em $E$.

Depois do teste de Weil, que afirma que para uma sequência real $(w_n)$ não monótona decrescente, se

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) w_n < \infty \tag{2}$$

então a série de Fourier de $f$ converge quase sempre para $f$, o que passou a ser o objeto das atenções, o problema da representação em séries deveria ser discutido a partir daqui. Pierre Fatou provou em 1906 que $w_n = n, n \geq 1$, satisfaz ao teste de Weil. Em 1909, Weil melhorou esse resultado, provando que $w_n = n^{1/3}$ ainda satisfaz o teste que leva seu nome. Em 1913, Hobson, Plancherel e Hardy, independentemente mostraram que pode-se tomar, respectivamente, $w_n = n^{\epsilon}$, $\epsilon > 0; w_n = \log^3 n$ e $w_n = \log^2 n$. Neste mesmo ano, Lusin afirmou que para toda $f \in L^2([-\pi, \pi])$, A série de Fourier de $f$ converge quase sempre para $f$. Esta afirmação sem demonstração, baseou-se em fortes evidências que Lusin encontrou em seus estudos, mas não foi capaz de provar. Em 1925, Kolmogorov e Silverstov, e independentemente Plessner, mostraram que $W_n = \log n$ ainda satisfaz o teste de Weil. Finalmente, em 1966, Carleson prova a afirmação de Lusin. Em 1968 Hunt prova que a afirmação de Lusin é verdadeira, também para toda $f \in L^P([-\pi,\pi]), 1 < p < \infty$. Em 1973, C. Feffermann dá outra demonstração para o Teorema de Carleson-Hunt. Taibleson e G.Weiess em 1982, estenderam o teorema para espaços mais gerais que $L^p$,(ver [17]).

Apresentamos a seguir a demonstração do teorema de Carleson-Hunt para espaços $L^p$. Esta demonstração usa uma majoração do operador $M$, definido adiante, que é extremamente difícil de ser obtida. Aqui, assumiremos a validade da majoração sem maiores comentários. O leitor interessado pode encontrá-la em [9] ou [11]. Outra demonstração diferente do Teorema de Carleson-Hunt pode ser vista em [5].

## 2 O Teorema

Consideremos apenas funções $f$ definidas no intervalo $[-\pi,\pi]$. Admitiremos os seguintes fatos bem conhecidos sobre os espaços das funções $L^p([-\pi,\pi])$;

**1)** Se $1 \leqq q < p \leqq +\infty$, então $L^P([-\pi,\pi]) \subseteq L^q([-\pi,\pi])$.

**2)** Seja $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ dado. Para qualquer $f \in L^P([-\pi,\pi]), p \in [1,+\infty)$, existe um polinômio $P$ tal que
$$||f - P||_p < \epsilon.$$

**3)** Sejam $p \in [1,+\infty], f \in L^p([-\pi,\pi])$ e $(f_n)$ uma sequência de funções em $L^p([-\pi,\pi])$ tal que
$$||f - f_n||_p \to 0$$
quando $n \to +\infty$. Então é possível extrair uma subseqüência $(f_{n_k})$ de $(f_n)$ tal que
$$f_{n_k}(x) \to f(x)$$
para todo $x \in [-\pi,\pi]$, quando $k \to +\infty$.

Dessas três propriedades é fácil deduzir o lema:

**Lema 2.1** *Seja* $p \in [1, +\infty]$ *e* $f \in L^P([-\pi, \pi])$. *Então, para todo* $\epsilon \in (0,1)$ *existe uma sequência* $(P_{\epsilon,k})$ *de polinômios tal que*

$$P_{\epsilon,k}(x) \to f(x)$$

*quando* $k \to +\infty$, *para quase todo* $x \in [-\pi, \pi]$ *e*

$$||f - P_{\epsilon,k}||_P < \epsilon^{2k}, \forall k \in \mathbb{N}$$

**Demonstração:** Usando (2), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um polinômio $Q_n$ tal que

$$||f_n - Q_n||_p^p < \epsilon^{2n}.$$

Como $0 < \epsilon < 1$, é claro que $||f - Q_n||_p \to 0$ quando $n \to \infty$, portanto, de (3), segue que existe uma subseqüência $(q_{nk})$ de $(Q_n)$ tal que

$$P_{\epsilon,k}(x) = Q_{nk}(x) \to f(x), \text{ quando } k \to +\infty,$$

para quase todo $x \in [-\pi, \pi]$, o que prova a primeira afirmação: Por outro lado, como $n_k \geqq k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e $0 < \epsilon < 1$ obtemos

$$||f - P\epsilon, k||_p^p = ||f - Q_{nk}|| < \epsilon^{2nk} \leqq \epsilon^{2k}.$$

Isto completa a demonstração do lema. $\square$

Segue de (1) que $L^p([-\pi, \pi]) \subseteq L^1([-\pi, \pi])$, para todo $p \in [1, +\infty]$. Seja $f \in L^1([-\pi, \pi])$, os coeficientes de Fourier de $f$, $c_n$ com $n \in \mathbb{Z}$ são dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{int} dt. \tag{3}$$

Por $S_n(x; f)$ denotaremos a $n$-ésima soma parcial da série de Fourier de $f$ no ponto $x$,

$$S_n(x, f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \tag{4}$$

$x \in [-\pi, \pi], n \in \mathbb{N}_0$.

A partir de agora $p \in (1, +\infty)$. Denotaremos por $\mathcal{F}$ a classe das funções definidas em $[-\pi, \pi]$ com valores em $[0, +\infty]$. Defina

$$M : L^p([-\pi, \pi]) \to \mathcal{F} \tag{5}$$

por

$$Mf(x) = \sup \{|S_n(x, f)|; n \in \mathbb{N}_0\}. \tag{6}$$

É fácil provar que $M$ é um operador sublinear. O seguinte teorema é um resultado bastante profundo e será admitido.

**Teorema 2.1** *O operador $M$ é de tipo $p$, para todo $p \in (1, +\infty)$. Mais precisamente,*

$$\forall p \in (1, +\infty), \exists C_p > 0 \; tq, ||Mf||_p \leqq C_p ||f||_p \tag{7}$$

Assumindo o teorema acima é fácil demonstrar o seguinte resultado.

**Lema 2.2** *Sejam $p \in (1, +\infty)$ e $f \in L^p([-\pi, \pi])$. Sejam $C_p$ a constante do teorema acima e $P_{\epsilon,k}$ os polinômios definidos no lema (2.1), para $0 < \epsilon < 1$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos,*

$$E_{\epsilon,k} = \left\{ x \in [-\pi, \pi]; M(f - P_{\epsilon,k})(x) > \epsilon^{k/p} \right\}.$$

*Então vale a seguinte relação:*

$$m(E_{\epsilon,k}) < C_p^p \epsilon^k.$$

**Demonstração:** Do lema (2.1) obtemos

$$||f - P_{\epsilon,k}||_p^p < \epsilon^{2k}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
m(E_{\epsilon,k}) &= (\frac{1}{\epsilon})^k m(E_{\epsilon,k})\epsilon^k \\
&= (\frac{1}{\epsilon})^k \int_{E_{\epsilon,k}} \epsilon^k dx \\
&\leqq (\frac{1}{\epsilon}^k \int_{E_{\epsilon,k}} \{M(f - P_{\epsilon,k})(x)\}^p dx \\
&= (\frac{1}{\epsilon})^k ||M(f - P_{\epsilon,k})||_p^p \\
&\leqq (\frac{1}{\epsilon})^k C_p^p ||f - P_{\epsilon,k}||_p^p \\
&\leqq (\frac{1}{\epsilon})^k C_p^p \epsilon^{2k} \\
&= C_p^p \epsilon^k,
\end{aligned}$$

o que concluí a demonstração do Lema. □

Na demonstração do teorema de Carleson-Hunt, vamos precisar dos dois seguintes teoremas:

**Teorema 2.2 (Riemann-Lebesgue)** *: Seja $f : a, b \to \mathbb{R}$ integrável. Então*

$$\lim_{|k| \to +\infty} c_k = 0$$

Em outras palavras, o teorema acima afirma que os coeficientes de Fourier $c_k$ tendem a zero quando $|k| \to +\infty$. A demonstração deste fato pode ser encontrada em qualquer livro de Medida e Integração.

**Teorema 2.3** *Seja $f$ uma função $2\pi$-periódica integrável a Lebesgue. Suponha que $f$ seja diferenciável em $x_0$. Então, a soma parcial de Fourier da $f$ no ponto $x_0$,*

$$S_{m,n}(x_0, f) = \sum_{k=-m}^{n} c_k e^{ikx}$$

*converge para $f(x_0)$ quando $m, n \to +\infty$.*

**Demonstração:** A demonstração dada aqui é devido a Chernoff. Trocando $f$ por $g$, onde $g(x) = f(x + x_0) - f(x_0)$, podemos assumir sem perda de generalidade que

$x_0 = 0$ e $f(0) = 0$ e $f'(0)$ existem, a função

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{ix} - 1}$$

é mensurável e limitada perto da origem, portanto integrável(pois $f$ é integrável). Agora temos:

$$f(x) = (e^{ix} - 1)g(x)$$

Se $a(k)$ e $b(k)$ são os k-ésimos coeficientes de Fourier de $f$ e $g$, respectivamente, temos a seguinte relação:

$$a(k) = b(k-1) - b(k).$$

Logo a série de Fourier é uma série telescópica. Com efeito,

$$S_{m,n}(0, f) = \sum_{k=-n}^{n} a(k) = b(-m-1) - b(n),$$

essa série tende a zero pelo Teorema de Riemann-Lebesgue. □

Chegamos finalmente a um dos teoremas mais importantes na Análise de Fourier.

**Teorema 2.4 (Carleson-Hunt)** *Seja $p \in (1, +\infty]$. Então qualquer que seja $f \in L^p([-\pi, \pi])$,*

$$S_n(x, f) \to f(x)$$

*para quase todo $x \in [-\pi, \pi]$, quando $n \to +\infty$.*

**Demonstração:** Seja $p \in (1, +\infty]$, como $L^\infty([-\pi, \pi]) \subseteq L^p([-\pi, \pi])$, basta provar o caso $p \in (1, +\infty)$. Seja $f \in L^p([-\pi, \pi])$. Para cada $\epsilon \in (0, 1)$, o Lema (2.1) assegura a existência de uma sequência de polinômios $(p_{\epsilon,k})$ e de um conjunto de medida nula $B_\epsilon \subset [-\pi, \pi]$ tal que para todo $x \in (-\pi, \pi] - B_\epsilon$

$$|P_{\epsilon,k}(x) - f(x)| \to 0,$$

quando $k \to +\infty$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja

$$E_{\epsilon,k} = \left\{ x \in (-\pi, \pi]; M(f - P_{\epsilon,k}(x) > \epsilon^{k/p} \right\}.$$

Então pelo Lema 2.2,

$$m(E_{\epsilon,k}) \leqq C_p^p \epsilon^k.$$

Note que, se $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$, então $E_{\epsilon_1,k} \subseteq E_{\epsilon_2,k}$.

Tomando $\epsilon = 1/l, l \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, sejam

$$A_l = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{\frac{1}{l},k},$$

$$A = \bigcap_{l=2}^{\infty} A_l,$$

$$B = \bigcup_{l=2}^{\infty} B_{1/l}.$$

É claro que $A$ e $B$ são conjuntos mensuráveis e, para todo $l \geq 2$,

$$m(A \cup B) \leqq m(A) + m(B) \leqq m(A_l) + \sum_{j=1}^{\infty} m(B_{1/j})$$
$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_{\frac{1}{l},k}) + C_p^p \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{l})^k = C_p^p \frac{1}{l-1}.$$

Logo $m(A \cup B) = 0$.

Vamos provar agora que

$$S_n(x,f) \to f(x),$$

para todo $x \in (-\pi,\pi] - (A \cup B)$.

Seja $x \in (-\pi,\pi] - (A \cup B)$ e $\eta > 0$. Escolha $0 < \delta < 1$ tal que

$$\delta^{1/p} < \frac{1}{3}\eta.$$

Como $0 < \delta < 1$, é claro que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\delta^{k/p} \leqq \delta^{1/p} < \frac{1}{3}\eta$$

e além disso,

$$l \geq \frac{1}{\delta} \Rightarrow (\frac{1}{l})^{k/p} \leqq \delta^{k/p} < \frac{1}{3}\eta.$$

Como $x \notin (A \cup B)$, existe $l \in \mathbb{N}, l \geqq 2$ tal que $x \notin A_l$ e $x \notin B1/j$ para todo $j \geqq 2$ natural.

Seja $L \in \mathbb{N}, L \geqq \max\{l, \frac{1}{\delta}\}$ e fixemos $\epsilon = \frac{1}{L}$. Então, $0 < \frac{1}{L} < \frac{1}{l} < 1 \Rightarrow E_{\frac{1}{L},k} \subseteq E_{\frac{1}{l},k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Portanto, $A_L \subseteq A_l$ e $x \notin A_L$; além disso,

$$L \geqq \frac{1}{\delta} \Rightarrow \epsilon^{k/p} = (\frac{1}{L})^{k/p} < \frac{1}{3}\eta.$$

Então qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|S_n(x,f) - f(x)| &\leqq |f(x) - P_{\epsilon,k}(x)| + |P_{\epsilon,k}(x) - S_n(x, P_{\epsilon,k})| + |S_n(x, P_{\epsilon,k} - f)| \\
&\leq |f(x) - P_{\epsilon,k}(x)| + |P_{\epsilon,k}(x) - S_n(x, P_{\epsilon,k})| + M(f - P_{\epsilon,k})(x) \\
&\leq |f(x) - P_{\epsilon,k}(x)| + |P_{\epsilon,k}(x) - S_n(x, P_{\epsilon,k})| + (\frac{1}{L})^{k/p} \\
&< |f(x) - P_{\epsilon,k}(x)| + |P_{\epsilon,k}(x) - S_n(x, P_{\epsilon,k})| + \frac{1}{3}\eta.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $x \notin B_\epsilon$,

$$|P_{\epsilon,k}(x) - f(x)| \to 0,$$

quando $k \to +\infty$, logo existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq K \Rightarrow |f(x) - P_{\epsilon,k}(x)| < \frac{1}{3}\eta.$$

Além disso, como $P_{\epsilon,k}$ é infinitamente diferenciável,

$$S_n(x, P_{\epsilon,k}) \to P_{\epsilon,k}(x).$$

Assim, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqq N \Rightarrow |S_n(x, p_{\epsilon,k}) - P_{\epsilon,k}(x)| < \frac{1}{3}\eta.$$

Portanto, dado $x \notin (A \cup B)$ e $\eta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
n \geqq N \Rightarrow & |S_n(x,f) - f(x)| \\
&\leqq |f(x) - P_{\epsilon,k}(x)| + |P_{\epsilon,k}(x) - S_n(x, P_{\epsilon,k}| + M(f - P_{\epsilon,k})(x) \\
&< \frac{1}{3}\eta + \frac{1}{3}\eta + \frac{1}{3}\eta.
\end{aligned}$$

E isto concluí a prova do teorema de Carleson-Hunt. □

A demonstração apresentada aqui é devida a Carleson-Hunt. Há uma outra demonstração para o mesmo teorema, que foi apresentada por C. Feffermann, onde os argumentos usados são quase todos em $L^2([0,2\pi])$ no final da prova ele apresenta modificações necessárias para o caso $f \in L^p([0,2\pi]), 1 < p < 2$.

Na bibliografia dada a seguir, o leitor interessado encontrará textos introdutórios e avançados que incluem basicamente os resultados mais importantes da Análise Harmônica. As referências [3], [8], [10] e [15] são textos básicos; [2] e [13] são de nível médio, [7], [11], [14], [16], [19] e [20] são de nível avançado e as demais apresentam outras refrências.

## Referências

[1] Andrade, D., Convergência pontual de séries de Fourier. Dissertação de Mestrado - PUC/RJ (1984).

[2] Carslaw, H. S., Introduction to the Theory of Fourier Series and Integrals. Macmillan, New York, 1930. Reprint by Dover, New York, 1952.

[3] Dym, H. and Mckean, H. P., Fourier Series and Integrals. Academic Press, New York and London, 1972.

[4] Edwards, R. E., Fourier Series: a modern Introduction. 2 vols. Holt, New York, 1967.

[5] Feffermann, C., Pointwise convergence Fourier Series. Ann. of Math 98 (1973), 511-572.

[6] Fourier, J., The Analytical Theory of Heat. Translated by A. Freemann, Cambridge, Univers. Press, London and New York, 1878. Reprinted by Dover, New York, 1955.

[7] Hardy Carleman, T. L'integrale de Fourier et questions qui s'y rattachent. Almqvist e Wilsell, Stockolm, 1944.

[8] Hardy, G. H. and Rogozinki, W., Fourier Series. Cambridge, Univers. Press, London and New York, 1944.

[9] Jorsboe, Ole G. Leif M ylbro, The Carleson-Hunt Theorem on Fourier Series. Lecture Notes in Mathematics, 911, Springer-Verlag, 1982.

[10] Katznelson, Y., An Introduction to Analysis Harmonic. Willey, New York, 1968.

[11] Loomis, L., An Introduction to Abstract Harmonic Analysis. Van Nostrand-Reinhold, Princeton, New Jersey, 1953.

[12] Maa Studies in Math, vol 13. Studies in Harmonic Analysis (especialmente o artigo de Zygmund, Notes on the History of series Fourier)

[13] Papoullis, A., The Fourier Integra and applications. Macgraw Hill.

[14] Rudin, W. Fourier Analysis on Groups. Willey (Interscience), New York, 1963.

[15] Seely, R., And Introduction to hte Theory of Fourier and Intgrals. MacMillan, New York, 1930. Reprint by Dover, New York, 1952.

[16] Soft Hewit, E. and Ross, K. A., Abstract Harmonic Analysis. 2 vols., Springer-Verlag, Berlin and New York, 1963-1970.

[17] Taibleson, M. and Weiss, G., Certain Function Spaces Connecte with A.E. Convergence of Fourier Series. Proc. of Conference on Harmonic Analysis . Wads. Publ. Vol. 1, 1982, 95-113.

[18] Weiss, G. Harmonic Analysis. MAA Studies in Math. ( 1965), 124-178.

[19] Weiner, N., The Fourier Integral and Certain of to Applications. Cambridge Univers. Press., London and New York, 1933. Repreint by Dover, New York, 1959.

[20] Zygmund, A., Trigonometric Series. $2^{\text{nd}}$ ed., 2 vols. Cambridge Univers. Press. London and New York.