Transformada de Laplace

Doherty Andrade*

www.metodosnumericos.com.br

Sumário

*doherty200@hotmail.com

Resumo

Estas notas foram especialmente elaboradas para servirem de texto introdutório sobre Transformada de Laplace e aplicações às equações diferenciais ordinárias. Exige-se um mínimo de conhecimento de Matemática.

A transformada de Laplace é uma importante ferramena para obter soluções de PVIs, pois ela elimina derivadas transformando EDOs em equações algébricas.

1 Introdução as EDO's

Esta seção é dedicada ao estudo de problemas de Cauchy ou problemas de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0,$$

onde a função f é admitida ser contínua sobre seu domínio de definição.

Equações diferenciais ordinárias são importantes em muitos problemas encontrados quando modelamos fenômenos físicos ou biológicos. Vamos ver mais adiante alguns exemplos que ilustram esta importância.

Uma equação diferencial ordinária, ou simplesmente uma EDO, é uma equação

$$F(x,y,y',y^{(2)},\ldots,y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

envolvendo derivadas de uma função $y(x)$ que desejamos determinar.

A ordem de uma EDO é a ordem da mais alta derivada que aparece na equação.

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, uma função definida e contínua em Ω. A equação diferencial ordinária de ordem 1, que estamos interessadas, é uma equação do tipo

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t)). \tag{1.2}$$

Dada $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ definida sobre um aberto I e de classe C^1 neste intervalo, se estiver verificada a condição (1.2), isto é,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t,\varphi(t)), \tag{1.3}$$

dizemos que φ é uma solução de (1.2).

Se $n > 1$, (1.2) é de fato um sistema de equações diferenciais ordinárias, pois $f = (f^1, f^2, \ldots, f^n)$ onde f^i são funções reais e contínuas definidas em Ω:

$$f^i : \Omega \to \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

A ordem da equação

$$u''' + x^2 u^5 u' - \sin(x) = 0$$

é três. Note que esta equação é não linear.

A equação geral (linear) de ordem k é do tipo

$$u^{(k)} + p_1(x)u^{(k-1)} + \cdots + p_k(x)u = f(x). \tag{1.4}$$

Quando $f(x) \equiv 0$ em (1.4) dizemos que a EDO é homogênea.

Suponha que sejam dados k números reais fixados $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Então a EDO de ordem k juntamente com as condições

$$u^{(k)} + p_1(x)u^{(k-1)} + \cdots + p_k(x)u = f(x) \tag{1.5}$$

$$u(x_0) = b_1, u'(x_0) = b_2, \ldots, u^{(k-1)}(x_0) = b_k. \tag{1.6}$$

é chamado de problema de valor inicial.

Note que x_0 é o valor da variável independente em que todas as condições iniciais são impostas e que existem tantas condições iniciais quanto é a ordem da EDO. Se condições são dadas em mais que um valor de x, resulta num problema de fronteira. É claro que uma combinação dos dois resulta num problema de valor inicial e fronteira.

Uma das três questões fundamentais no estudo das equações diferenciais ordinárias é a determinação de suas soluções. Existem muitos métodos para determinação **explícita** de soluções, mas estes métodos não são gerais e determinam as soluções apenas de alguns tipos muito particulares de EDO's. A maior parte das EDO's não pode ser resolvida explicitamente. Já que a forma explícita da solução de uma EDO pode não existir, outra grande questão que surge é o estudo das propriedades das soluções (sem conhecê-las), é a **teoria qualitativa**. Esta parte da teoria das EDO's estuda o comportamento das soluções e propriedades geométricas.

Uma terceira questão importante trata da existência e unicidade de soluções das EDO's. Saber da existência de soluções é o primeiro passo no estudo das EDO's, se existe podemos procurar determiná-la ou uma aproximação para ela. O resultado mais importane e básico da teoria das EDO's é o Teorema **??** de existência e unicidade. Antes mais alguns comentários.

Muitas vezes não é possível escrever a EDO (1.1) da forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Esta é uma situação particular que merece uma definição.

A EDO (1.1) é chamada linear se F é linear na variáveis $y, y', y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$. Deste modo uma EDO linear geral de ordem n é uma expressão do tipo

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x). \tag{1.7}$$

Para começar o nosso estudo vamos considerar primeiramente as EDO's lineares de primeira odem. Isto é, EDO's do tipo

$$y' + p(x)y = g(x).$$

Antes de avançarmos precisamos duas novas noções. Para ilustrar, consideremos a EDO $y'' + y = 0$ que admite solução dada por $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$, em que c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, tendo então a EDO acima infinitas soluções. Para determinar de modo único a solução, precisamos determinar as constantes e para isto precisamos mais informações sobre a solução. Há duas formas de fazer isto.

Dando condições iniciais que a solução deve satisfazer num ponto. Neste caso temos um problema de valor inicial (PVI). Por exemplo:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Aqui a solução é $y(x) = \sin(x)$.

Ou, dando condições de fronteira que a solução deve satisfazer na fronteira de um conjunto. Neste caso temos um problema de valor de fronteira (PVF). Por exemplo:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1,\ y(\pi) = -1. \end{cases}$$

Aqui a solução é $y(x) = \cos(x)$.

Alguns métodos importantes de solução de EDO's se baseiam no tipo de problema PVI ou PVF.

2 Algumas EDO's particulares

Equações Separáveis: Algumas EDO's podem ser escritas sob a forma

$$g(y)y' = f(x),$$

ou seja

$$g(y)dy = f(x)dx.$$

Tal equação é chamada de equação de variáveis separáveis porque as variáveis x e y foram separadas. Integrando ambos os membros

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$$

obtemos a solução.

Como exemplo, consideremos a EDO separável $y' = -\frac{4x}{9y}$. Separando as variáveis obtemos $ydy = -\frac{4}{9}xdx$. Integrando ambos os lados obtemos

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{2}{9}x^2 + c,$$

ou ainda

$$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = c.$$

Algumas EDO's podem ser reduzidas a forma separável. Por exemplo,

$$y' = g(\frac{y}{x}).$$

Fazendo $u = \frac{y}{x}$ temos que $y = ux$ e derivando obtemos

$$y' = u + u'x.$$

Substituindo, segue que

$$u + u'x = g(u)$$

que podemos separar as variáveis

$$\frac{u}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

A solução é obtida por integração.

Tomemos o exemplo $2\frac{y}{x}y' - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 = 0$. Fazendo $u = \frac{y}{x}$ obtemos $2xuu' = u^2 + 1 = 0$. Separando as variáveis temos

$$\frac{2udu}{1+u^2} = \frac{-dx}{x}.$$

Integrando obtemos $1 + u^2 = \frac{c}{x}$. Voltando às variáveis originais temos

$$x^2 + y^2 = cx.$$

Equações diferenciais exatas: Uma equação diferencial de primeira ordem

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

é dita exata se o primeiro membro é a diferencial total ou exata de uma função $u(x,y)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Neste caso, tem-se $du = 0$ e mediante integração $u(x,y) = c$, onde c é uma constante.

Como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M, \ \frac{\partial u}{\partial y} = N,$$

supondo que M e N possuam derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

supondo continuidade das derivadas de segunda ordem segue que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Assim, $u = \int M dx + k(y)$. Calculando $\frac{\partial u}{\partial y}$ e comparando podemos determinar $\frac{dk}{dy}$ e integramos para obter a solução.

EDO's lineares de primeira ordem

Consideremos a EDO linear de primeira ordem com uma condição inicial $y(x_0) = y_0$ (PVI) dada por

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= g(x) \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Vamos multiplicar a EDO (2.8) por

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(t)dt\right) = \exp(P(x)),$$

onde $P(x)$ denota a primitiva de $p(x)$. Chamamos $\mu(x)$ de fator integrante .

Assim, a EDO (2.8) fica reduzida a

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x).$$

Integrando de $x = x_0$ até um x arbitrário temos

$$\mu(x)y(x) = \int_{x_0}^{x} \mu(s)g(s)ds + \mu(x_0)y(x_0).$$

Ou seja, a solução é dada por

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int_{x_0}^{x} \mu(s)g(s)ds + \mu(x_0)y(x_0)\right]. \tag{2.9}$$

Assim, o que acabamos de provar que toda EDO do tipo (2.8) tem solução e a solução é dada por (2.9).

Vamos ver um exemplo, repetindo o processo acima:

$$y' - 2xy = x, \;\; y(0) = 1.$$

Temos que $\mu(x) = \exp\left(-\int 2xdx\right) = \exp(-x^2)$.

De modo que a equação fica reduzida a

$$\left(\exp(-x^2)y\right)' = x\exp(-x^2).$$

Portanto, $\mu(x_0)y(x_0) = 1$. Assim,

$$y\exp(-x^2) = \int_0^x t\exp(-t^2)dt + 1 = 1 - \frac{1}{2}\exp(-x^2) + \frac{1}{2}.$$

Finalmente, temos

$$y = \exp(x^2)\left(-\frac{1}{2}\exp(-x^2) + \frac{3}{2}\right)$$

e portanto

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\exp(x^2)$$

Outro exemplo, desta vez usando a expressão dada pela (2.9).

$$y' - 2xy = 1, \;\; y(0) = 1.$$

Como no exemplo anterior $\mu(x) = \exp(-x^2)$ e de acordo com a fórmula temos

$$y = \exp(x^2)\left[\int_0^x \exp(-t^2)dt + 1\right].$$

Exercício 2.1 $\boxed{1}$ *Use (2.9) para encontrar a solução da EDO* $xy' + 2y = 4x^2$ *com* $y(1) = 2$.

$\boxed{2}$ *Mostre que* $\varphi(x) = \exp(2x)$ *é solução da EDO* $y' - 2y = 0$ *e que* $\phi(x) = \frac{1}{x}$ *é solução de* $y' + y^2 = 0$.

O seguinte resultado garante a existência e unicidade de solução para uma família de EDO's. Note a generalidade do resultado, inclui mais do que apenas as lineares.

Teorema 2.2 (Existência e Unicidade) *Sejam* f *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *contínuas em algum retângulo* $R = I_x \times I_y$, *onde* $I_x = \alpha < x < \beta$ *e* $I_y = \gamma < y < \delta$ *são intervalos e* R *contém o ponto* (x_0, y_0). *Então, em algum intervalo* $I \subset I_x$ *contendo* x_0, *existe uma única solução* $y = \varphi(x)$ *do problema de valor inicial (2)*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

Exemplo 2.3 *a) Considere o seguinte problema:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Notemos que a função $f(x) = \sqrt{x}$ *é contínua e temos como soluções:*

$$x_1 = 0$$

e

$$x_2(t) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, \text{ se } x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2}{4}, \text{ se } x \leq 0 \end{cases}.$$

Isto mostra que a condição de f *ser contínua não é suficiente para garantir a unicidade de solução.*

b)$y' = 4x - \frac{2}{x}y, \;\; y(1) = 2$ *tem uma única solução*

Exercício 2.4 *Determine as soluções dos seguintes problemas de valor inicial.*
a) $xy' + 2y = 0, \quad com\ y(1) = -1.$
b) $2y' + 3y = exp(-x), \quad com\ y(-3) = -3.$

3 Aplicações

Exemplo 3.1 (Desintegração Radioativa)

Se a quantidade do material radiotivo no instante t é $Q(t)$, então a taxa de variação no instante t é proporcional a quantidade $Q(t)$, isto é,

$$\frac{d}{dt}Q(t) = -kQ(t),$$

onde $k > 0$ é chamada a constante de desintegração radiotiva do material.

A solução desta EDO é

$$Q(t) = c\exp(-kt).$$

Se a quantidade inicial de material radiotiva é $Q(0) = Q_0$, então a solução é

$$Q(t) = Q_0\exp(-kt).$$

O estrôncio tem constante de desintegração radiotiva $k = 0,0244$ por ano. Se a quantidade inicial de uma amostra é 20 Kg, após 10 anos teremos

$$Q(10) = 20\exp(-0,0244 \times 10) \equiv 15,7\text{Kg}.$$

Exemplo 3.2 (Movimento no meio viscoso)

Uma particula de massa m é abandonada num meio viscoso, isto é, num meio que oferece resistência ao seu movimento proprocional a velocidade. O movimento da partícula no meio viscoso depende da constante k de viscosidade, da seguinte forma

$$F = m \cdot a = mg - kv,$$

onde a é a aceleração e v é a velocidade.

Reescrevendo,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g.$$

A solução desta EDO é dada por

$$v(t) = \frac{mg}{k} + C\exp(-\frac{k}{m}t).$$

Exemplo 3.3 (Lei de resfriamenteo de Newton)

A lei de resfriamente de Newton diz que a taxa de variação da temperatura $\frac{dT}{dt}$ de um corpo em relação ao tempo é proporcional a diferença da sua temperatura T e da temperatura ambiente T_0, isto é,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0),$$

onde $k > 0$ é uma constante que depende do material.

A solução desta EDO é dada por

$$T(t) = T_0 + C\exp(-kt).$$

Como exemplo, se um corpo resfria-se de 300^0C para 150^0C em 30 minutos quando imerso num meio de temperatura constante igual a 15^0C, determine a temperatura do corpo 30 minutos depois de ter atingido a temperatura de 150^0C.

Quando $t = 0$ temos $T(0) = 300$ graus, assim $C = 285$. Logo, temos que

$$T(t) = 15 + 285\exp(-kt).$$

Como $T = 150$ quando $t = 30$, então

$$T(t) = 15 + 285\left[\frac{135}{285}\right]^{\frac{t}{30}}.$$

Assim, quando $t = 60$ obtemos $T = 78,9^0C$.

Exemplo 3.4 (Diluição de soluções)

Um recipiente contendo L litros de água começa a receber uma mistura de água salgada, c kg de sal por litro de solução, a uma razão constante de a litros por segundo. Um sistema de agitação no recipiente mantém homogênea a mistura que vai sendo formada. Simultanêamente ao processo de injeção de água salgada, inicia-se a retirada do recipiente a solução homogênea formada na razão de a litros por segundo. Determine a quantidade de sal no recipiente num instante futuro.

Por $q(t)$ vamos denotar a quantidade de sal presente no recipiente num tempo t. Logo, a concentração de sal na solução é $\frac{q}{L}\ \frac{Kg}{l}$

Assim, podemos escrever

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = \underbrace{ac}_{entra} - \underbrace{a\dfrac{q}{L}}_{sai}, \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

que é um problema de valor inicial.

A solução é dada explicitamente por

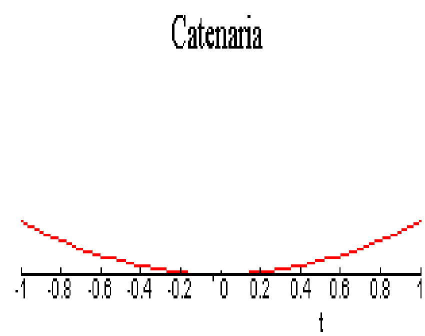
$$q(t) = cL(1 - \exp(-\frac{at}{L})).$$

Note que da solução obtemos que a concentração $\frac{q(t)}{L}$ de sal no reservatório tende a c quando $t \to \infty$.

Exemplo 3.5 (Catenária)

Queremos determinar a forma assumida por um fio flexível e inextensível suspenso em dois pontos A e B, e sujeito ao seu próprio peso. Flexível significa que a tensão no fio é sempre no sentido da tangente.

Considere um sistema de coordenadas no ponto mais baixo da curva e o eixo y coincidente om a vertical. Vamos considerar o equilíbrio do trecho OP do fio: $H + T + V = 0$, onde H é a tensão do cabo no ponto mais baixo, T é a tensão no ponto $P = (x, y)$ e V é o peso no trecho OP, $V = \omega s$ onde ω é o peso por unidade de comprimento e s o comprimento do arco OP. A projeção desta equação de equilíbrio



sobre os eixos temos:

$$\begin{aligned} -H + T\cos(\theta) &= 0, \\ -V + T\sin(\theta) &= 0, \end{aligned}$$

segue que

$$\tan(\theta) = \frac{\omega}{H}s.$$

Como $\frac{\omega}{H} = c$ constante e $\tan(\theta) = y'$, e derivando podemos escrever

$$y'' = c\frac{ds}{dx}.$$

Como

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$

concluímos que y deve satisfazer

$$y'' = c\sqrt{1 + (y')^2}.$$

Como $y(0) = y'(0) = 0$, obtemos a seguinte solução:

$$y(t) = c^{-1}(\cosh(cx) - 1).$$

Assim, um fio inextensível e flexível, suspenso em dois pontos e sujeito ao seu próprio peso, toma a forma do gráfico de cosseno hiperbólico, esta curva é a catenária.

Exemplo 3.6 (Crescimento Populacional)

Neste exemplo vamos estudar alguns modelos bem simples que tratam da dinâmica de uma população. Os modelos que vamos analisar são obtidos fornecendo a taxa de crescimento da população. A taxa de crescimento de uma população $p(t)$, num instante t, é, $\frac{dp(t)}{dt}$.

A. O MODELO MALTHUSIANO

Supomos que a taxa de crescimento da população e' constante e igual a k. Assim temos

$$\frac{dp(t)}{dt} = kp(t).$$

Este modelo é bom para descrever a dinâmica de uma população de microorganismos e num intervalo limitado de tempo.

A equação que descreve a dinâmica da população é dada por:

$$\frac{d}{dt}\, p(t) = k\, p(t)$$

A constante k é a medida que mostra como a população cresce por unidade de tempo.

Se $k = 0$ então a população não cresce e se $k < 0$ a população está decresecendo.

$$\frac{d}{dt}\, p(t) = 0$$

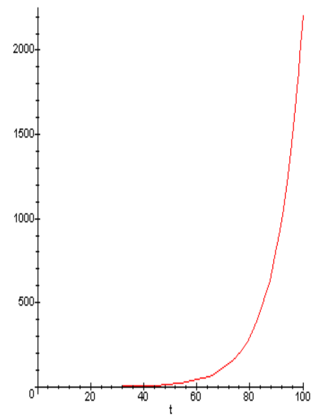
Podemos usar Maple e "dsolve"para resolver a equação diferencial. Devemos especificar as condições iniciais, i.e.,os valores de $p(t)$ e $\frac{dp(t)}{dt}$ em $t = 0$. Supomos que a população inicial seja igual a P_0, assim a solução é

$$p(t) = P_0$$

Como voce pode ver, a solução é a curva constante. Isto significa que a população será sempre a mesma.

Agora vamos experimentar para ver o que acontece se um pequeno número $k = 0.10$, correspondendo a taxa de crescimento, for considerado.

$$\frac{d}{dt} p(t) = \frac{1}{10} p(t)$$



A solução é dada por

$$p(t) = e^{(1/10\,t)}\,k$$

Esta solução parece mais complicada do que quando $k = 0$. Vejamos o comportamento num gráfico com o valor de $k = 0.1$.

$$p(t) = .1\,e^{(1/10\,t)}$$

Vamos tomar o lado direito para plotar.

Como você pode ver a população cresce exponencialmente.

Agora vamos tentar substituir um valor de $k < 0$ na equação e então resolver e plotar o resultado.

$$\frac{d}{dt}p(t) = -k\,p(t)$$

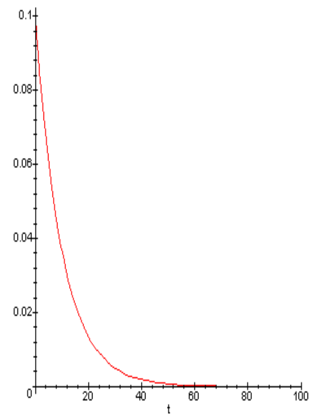
A solução é dada por

$$p(t) = e^{(-1/10\,t)}P_0$$

Tomando $P0 = 0.1$ obtemos

$$p(t) = .1\,e^{(-1/10\,t)}$$

o gráfico.



B. O MODELO DE VERHUSLT

Não parece razoável ter numa população uma taxa de crescimento constante. O modelo Verhulst leva isto em conta, a taxa de crescimento proposto por ele é

$$\frac{dp(t)}{dt} = (a - bp)p,$$

onde a e b são constantes positivas. O modelo de Verhulst supõe que a taxa de crescimento decresce linearmente com a população. Este ainda não é um modelo ideal, pois não leva em conta que a taxa de produção de novos membros da espécie depende da idade dos pais, isto é, os novos membros não contribuem de imediato para o aumento da espécie.

A equação que descreve a dinâmica da população neste modelo é dada por.

$$\frac{d}{dt}p(t) = (a - bp(t))\, p(t)$$

Vamos tomar $a = b + 1$ e $b = 2$

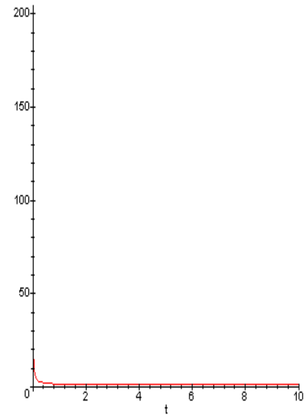
$$\frac{d}{dt}p(t) = (3 - 2p(t))\, p(t)$$

e $P_0 = 200$

$$\frac{d}{dt}p(t) = (3 - 2p(t))p(t)$$

resolvendo a EDO obtemos

$$p(t) = -\frac{600}{-400 + 397\, e^{(-3\,t)}}$$



Como voce pode ver, a solução tem uma exponencial no denominador.

Vamos plotar um gráfico de $p(t)$ contra o tempo para um particular P_0 inicial igual a 200. Usamos o comando "plot":

O que acontece quando o tempo tende para o infinito? A população tende para uma população limite que é dada por $\frac{a}{b}$.

Exemplo 3.7 (Pêndulo)

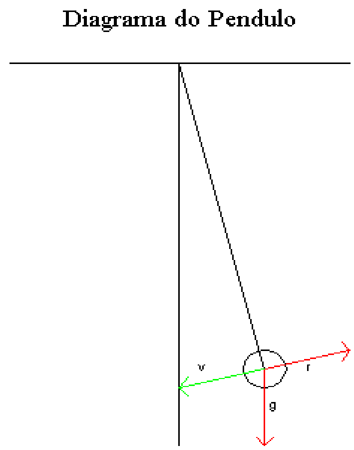
O diagrama mostra um pêndulo consistindo de uma pequena massa esférica suspensa por um fio. O pêndulo está imerso em um líquido que resiste ao seu movimento. A flecha verde mostra a velocidade v da esfera, a flecha vermelha mostra a força agindo sobre ela.

Existe uma força para baixo g devido a gravidade e também r uma força resistiva devido ao fluido, agindo na direção oposta a velocidade do pêndulo.

A equação que descreve o movimento do pêndulo em termos do ângulo θ entre a esfera do pêndulo e a vertical é dada por:

$$\theta(t)_{tt} = -k\,\theta_t(t) - \theta(t).$$

A constante k é a medida que mostra quanta resistência o fluido exerce sobre a



esfera. Se $k = 0$ então o fluido não exerce resistência.

Tomando $\theta(0) = \phi, \theta_t(0) = 0$ obtemos a seguinte solução.

$$\theta(t) = \phi \cos(t)$$

Como você pode ver, a solução é a curva cosseno. Isto significa que o pêndulo oscilará para sempre.

Agora vejamos o que acontece se um pequeno número k, correspondendo a resistência do fluido sobre o pêndulo, for considerado,

$$\theta(t)_{tt} = -\frac{1}{10}\theta_t(t) - \theta(t)$$

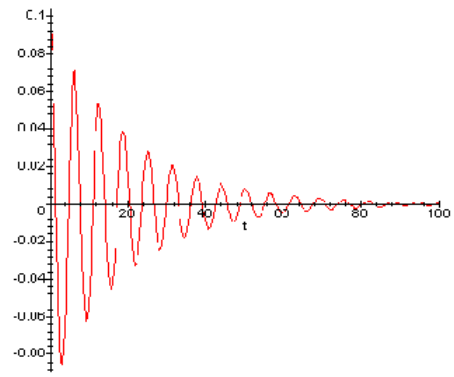
com $\theta(0) = \phi,\ \theta_t(0) = 0$.

A solução é dada por

$$\theta(t) = \phi\, e^{(-1/20\,t)} \cos(\frac{1}{20}\sqrt{399}\,t) + \frac{1}{399}\,\phi\,\sqrt{399}\, e^{(-1/20\,t)} \sin(\frac{1}{20}\sqrt{399}\,t).$$

Esta solução parece mais complicada do que quando $k = 0$. Vejamos o comportamento num gráfico com o valor de $\phi = 0.1$.

Como voce pode ver as oscilações do pêndulo gradualmente decrescem de amplitude.



Exemplo 3.8 (Circuito Elétrico)

Um indutor de 2 H e um capacitor de 0.02 F estão conectados série com um gerador suprindo uma força eletromotriz de 100sin(ωt) volts.Determine a carga $q(t)$ no capacitor como função de ω se a carga inicial no capacitor e a corrente são ambos nulos.

Como $i = \dfrac{dq}{dt}$, as leis de Kirchhoff permitem escrever

$$2q'' + 50q = 100\sin(\omega t).$$

Seja $Q(s) = \mathcal{L}(q)$. Como $q'(0) = i(0) = 0$ e $q(0) = 0$, aplicando a transformada de Laplace obtemos

$$Q(s) = \frac{50\omega}{(s^2+\omega^2)(s^2+25)}.$$

De onde segue que

$$q(t) = \frac{10}{25-\omega^2}\left[5\sin(\omega t) - \sin(5t)\right].$$

Exemplo 3.9 (Sistema Massa-Mola)

Consideremos num sistema massa–mola uma massa m ligada a uma mola flexível e fixa em 0 e livre para mover-se sem atrito no plano. Se x denota a elongação de m no tempo t a partir da posição de equilíbrio ou repouso, de acordo com a lei de Hooke existirá uma força restauradora agindo sobre m igual a kx, onde k é uma constante que depende da mola. A lei de Newton diz que a força total que age sobre m é $m\frac{d^2x}{dt}$. Assim, temos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Se além disso, existe uam força de amortecimento proporcional à velocidade de m, a equação do movimento é

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Ou do mesmo modo,

$$mx'' + \beta x' + kx = 0.$$

Supondo que a massa está inicialmente em repouso em $x = 10$, então as condições iniciais são

$$x(0) = 10, \quad \text{e } x'(0) = 0.$$

4 Transformada $\mathcal{L}$ de Laplace

Nesta seção vamos usar o conceito de operador linear e seu inverso, na solução de problemas de valor inicial. A técnica da Transformada de Laplace é uma poderosa ferramenta na determinação de soluções de equações diferenciais ordinárias com condições iniciais. O operador $\mathcal{L}$ é um operador integral (linear) que destrói derivadas, transformando edo's em simples equações algébricas.

Dizemos que f é contínua por partes em $[a, b]$ se é contínua exceto num número finito de pontos deste intervalo e se em cada ponto x_0 de descontinuidade existem os limites laterais a direita e a esquerda, isto é,

$$\lim_{h\to 0^+} f(x_0 + h) \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0^+} f(x_0 - h)^{1}, \text{ existem}$$

quando h tende a zero por valores positivos.

Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ e consideremos

$$\int_0^\infty \exp(-st)f(t)dt, \tag{4.1}$$

onde s é uma variável real. Quando f é suficientemente bem comportada, que será feito preciso mais adiante, esta integral convergirá para certos valores de s, definindo uma função de s, chamada de *transformada de Laplace* de f, e será representada por $\mathcal{L}[f]$ ou $\mathcal{L}[f](s)$.

[1] apenas um destes limites tem sentido quando x_0 é extremo do intervalo.

Como exemplo vamos determinar $\mathcal{L}[\cos(at)]$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos(at)] &= \int_0^\infty \exp(-st)\cos(at)dt \\
&= \lim_{to\to\infty}\int_0^{t_0} \exp(-st)\cos(at)dt \\
&= \lim_{t_0\to\infty}\left[\frac{\exp(-st_0)}{s^2+a^2}(a\sin(at_0)-s\cos(at_0))+\frac{s}{s^2+a^2}\right] \\
&= \frac{s}{s^2+a^2},\;\; s>0,
\end{aligned}$$

pois este limite existe se $s > 0$.

Observe que para (4.1) existir devemos exigir que f seja dominada por alguma exponencial, assim $\mathrm{e}^{-st}f(t)$ tende para zero rapidamente quando t cresce. Mais precisamente, vamos introduzir o seguinte conceito,

Definição 4.1 *Dizemos que f é de ordem exponencial em $[0,\infty)$ se existem constantes $C > 0$ e α tais que*

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t},\;\; \forall t > 0. \tag{4.2}$$

São exemplos de funções de ordem exponencial, $f(t) = C$ (contante) e

$$t^n,\;\; \mathrm{e}^{at},\;\; \sin(bt),\;\; \cos(at),\;\; \mathrm{e}^{at}t^n\sin(bt),\;\; \mathrm{e}^{at}t^n\cos(bt).$$

Como consequência também são funções de ordem exponencial, os polinômios e os polinômios trigonométricos.

Para simplificar a linguagem, uma função de ordem exponencial satisfazendo (4.2) será chamada de função de ordem exponencial α.

Teorema 4.2 (Condições suficientes para a existência de $\mathcal{L}$) *Se f é contínua por partes e de ordem exponential, então existe um real α tal que*

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)dt,$$

converge para todos os valores de $s > \alpha$.

Demonstração: Como f é de ordem exponencial, exitem $C > 0$ e α reais tais que

$$|f(t)| \leq \mathrm{C}\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
|\int_0^\infty \exp(-st)f(t)dt| &\leq C\int_0^\infty \exp(-s(-\alpha)t)dt \\
&= \lim_{t_0\to\infty} \frac{C}{s-\alpha}\left[1-\exp(-(s-\alpha)t_0)\right] \\
&= \frac{C}{s-\alpha}, \quad \text{se } s>\alpha.
\end{aligned}$$

Logo, a transformada de Laplace de toda função de ordem exponencial existe, mas e a recíproca? Uma função cuja transformada de Laplace existe é necessariamente de ordem exponencial? A resposta é não, pois a função $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ tem transformada de Laplace dada por

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{s^{3/2}}$$

embora não seja de ordem exponencial.

Também e^{t^2} não é função de ordem exponencial.

Assim, o conjunto das funções que possuem transformada de Laplace contém propriamente o conjunto $\mathcal{E}$ das funções contínuas por partes e de ordem exponencial. O conjunto $\mathcal{E}$ é o suficiente para a maioria das nossas aplicações.

5 Propriedades

Vamos representar por $\mathcal{E}$ o conjunto de todas as funções contínuas por partes e de ordem exponencial. Note que $\mathcal{E}$ munido das operações usuais de soma de funções e de multiplicação de escalar real por função, é um espaço vetorial real. Por $\mathcal{F}$ vamos representar o cojunto de todas as funções reais definidas em intervalos da forma (a_0,∞) ou $[a_0,\infty)$, $a_0 \geq -\infty$. Em $\mathcal{F}$ adotamos a seguinte definição modificada de soma de funções: se f e g pertencem a $\mathcal{F}$ definimos $f+g$ como sendo a função cujo domínio é a interseção dos domínios de f e g, e cujo valor em qualquer ponto s da a interseção é $f(s)+g(s)$. Desta maneira segue que $\mathcal{L}$ é um operador linear entre $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$.

Vamos resumir este comentário com o seguinte resultado.

Teorema 5.1 (Linearidade $\mathcal{L}$) *Sejam f e g pertencentes a $\mathcal{E}$ e $k \in \mathbb{R}$. Então, $\mathcal{L}[kf+g](s) = k\,\mathcal{L}[f](s) + \mathcal{L}[g](s)$.*

Cuidado ao dizer que $\mathcal{L}$ é um operador linear. É preciso deixar bem claro esta noção, pois se considerarmos $f(t) = 1$ e $g(t) = -f(t))$, então $\mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$ é a função nula no intervalo $(0, \infty)$, enquanto $\mathcal{L}[f + g] = \mathcal{L}[0]$ é função nula no em $(-\infty, \infty)$. Assim, só podemos dizer que $\mathcal{L}[f + g]$ e $\mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$ são iguais para aqueles valores de s onde ambas as funções estão definidas. Esta dificuldade pode ser contornada se concordarmos que duas funções de $\mathcal{F}$ são idênticas quando elas coincidem em algum intervalo da forma (a, ∞).

Teorema 5.2 (Lerch) *Sejam f e g pertencentes a $\mathcal{E}$. Suponha que existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s),\ \forall s > s_0$. Então, $f(t) = g(t),\ \forall t > 0$, exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade.*

A demonstração será omitida. Observe que o teorema acima diz que $\mathcal{L}$ é injetora.

Teorema 5.3 (Comportamento assintótico de $\mathcal{L}[f]$) *Se $f \in \mathcal{E}$, então,*

$$\lim_{s \to \infty} \mathcal{L}[f](s) = 0.$$

Demonstração: Como existem constantes $C > 0$ e α tais que

$$|\mathcal{L}[f](s)| \leq \frac{C}{s - \alpha},\ \ \forall s > \alpha,$$

o resultado segue imediatamente.

Teorema 5.4 (Fórmulas Elementares) *Sejam $f,\ g \in \mathcal{E}$ e $a \in \mathbb{R}$, então*

	g	$\mathcal{L}[g]$
1	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ \ s > 0$
2	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ \ s > 0$
3	1	$\frac{1}{s},\ \ s > 0$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ \ s > 0,\ n \in \mathbb{N}$
5	$\exp(at)$	$\frac{1}{s-a},\ \ s > a$
6	f'	$s\mathcal{L}[f] - f(0^+)$, se , $f' \in \mathcal{E}$
$6'$	f''	$s^2\mathcal{L}[f] - sf(0^+) - f'(0^+)$, se , $f'' \in \mathcal{E}$
7	$\exp(at)f$	$\mathcal{L}[f](s-a)$, 1^0 deslocamento na variável s
8	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s)$,
9	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f](s)$,
10	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)$,

Teorema 5.5 (Primeiro teorema do deslocamento na variável s) *Seja f função contínua por partes e de ordem exponencial. Então,*

$$\mathcal{L}[e^{at}f] = \mathcal{L}[f](s-a)^2.$$

Demonstração: A demonstração é imediata e deixamos como exercício.

Para o próximo resultado precisamos da função degrau unitário $u_a(t)$ definida por

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, \text{se } \ t \leq a \\ 1, \ \text{ se } \ t > a. \end{cases}$$

A função degrau unitário é útil para escrever funções como esta

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{se } \ t \leq a \\ \sin(t-a), \ \text{ se } \ t > a. \end{cases}$$

Com efeito, $f(t) = u_a(t)\sin(t-a)$.

Teorema 5.6 *Seja $f(t) = u_a(t)g(t-a)$, $a \geq 0$, função contínua por partes e de ordem exponencial. Então,*

$$\mathcal{L}[f] = \exp(-as)\mathcal{L}[g].$$

Demonstração: É imediato e deixamos como exercício.

Teorema 5.7 (Mudança de Escala) *Seja f função contínua por partes e de ordem exponencial e $a \neq 0$. Então,*

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f](\frac{s}{a}).$$

Teorema 5.8 (Transformada de Laplace da derivada) *Seja $f'(t)$ é função contínua por partes e de ordem exponencial. Então,*

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f] - f(0+).$$

Demonstração: A prova decorre de uma integração por partes. De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f'(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \mathrm{e}^{-st} f'(t)dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[\mathrm{e}^{-st} f(t)\right]_0^b + s\int_0^b \mathrm{e}^{-st} f(t)dt \\ &= s\mathcal{L}[f](s) - f(0+). \end{aligned}$$

[2] $\exp(-as)$ é chamado fator de retardamento

Corolário 5.9 *Se $f^{(n)}$ é contínua por partes e de ordem exponencial em $[0, \infty)$, então é fácil obter*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n \mathcal{L}[f] - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+).$$

Demonstração: A prova segue por indução.

Teorema 5.10 (Transformada de Laplace de integrais)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f].$$

Demonstração: Se $G(t) = \int_0^t f(u)du$, então $G'(t) = f(t)$ e $G(0) = 0$. Logo,

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[G'] = s\mathcal{L}[G] - G(0) = s\mathcal{L}[G],$$

e assim $\mathcal{L}[G] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f]$.

Teorema 5.11 (Transformada de Laplace de funções periódicas) *Se f é ordem exponencial e de período p, então*

$$\mathcal{L}[f] = \frac{1}{1 - \exp(-ps)} \int_0^p \exp(-st) f(t) dt.$$

Demonstração: Por definição e fazendo $x = t - np$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f] &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{np}^{(n+1)p} \exp(-st) f(t) dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nps) \int_0^p \exp(-sx) f(x) dx \\
&= \frac{1}{1 - \exp(-ps)} \int_0^p \exp(-sx) f(x) dx,
\end{aligned}$$

de onde segue o resultado.

6 A Inversa da Transformada de Laplace

Na determinação da solução de uma EDO usando a transformada de Laplace devemos reconstruir a solução $y(t)$ conhecendo-se a sua transformada $Y(s) = \mathcal{L}(y)$.

O operador que retorna $y(t)$ a partir de $\mathcal{L}(y)$ é a transformada inversa de Laplace. Escrevemos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) \quad \text{ou} \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}(y)\right].$$

Observe que o Teorema 5.2, Teorema de Lerch, diz que a tranformação linear $\mathcal{L}(y)$ é injetora. Assim, se denotamos por $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ a sua imagem temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}: \; \mathcal{E} &\to \mathcal{L}(\mathcal{E}) \\ f &\mapsto \mathcal{L}(f) \end{aligned}$$

é inversível. Como a inversa de uma transformação linear é também linear, temos que $\mathcal{L}^{-1}$ é linear.

Assim temos o seguinte resultado,

Teorema 6.1 *Se $F = \mathcal{L}[f]$ e $G = \mathcal{L}[g]$, então, $\mathcal{L}^{-1}[k\,F + G](s) = k\,f + g$.*

A tabela da página 19 pode ser usada no cálculo de $\mathcal{L}^{-1}[F]$.

Exercício 6.2 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-4s+20}\right].$$

sugestão: use frações parciais para decompor a expressão,

7 Frações Parciais

No trabalho com $\mathcal{L}$, em geral, nos deparamos com expressões racionais $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, onde $P(s)$ e $Q(s)$ são polinômios. Para determinar a inversa $\mathcal{L}^{-1}(F)$ é conveniente decompor F em frações o mais simples possível. Fazemos isto usando o método das frações parciais.

Como $F(s) \to 0$ quando $s \to \infty$, podemos considerar apenas o caso em que o grau de P é menor do que o grau de Q e sem fatores em comum.

Primeiro caso: Fatores Lineares Distintos:

Se $Q(s)$ só tem fatores lineares não repetidos, por exemplo,

$$Q(s) = (s - a_1)(s - a_2) \cdots (s - a_n),$$

então decompomos F em fraçoes do tipo

$$F(s) = \frac{A_1}{s - a_1} + \cdots + \frac{A_n}{s - a_n}.$$

Como exemplo, decomponha

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s - 6}{s(s-1)(s-2)}.$$

Como o denominador só tem fatores lineares não repetidos

$$Q(s) = s(s-1)(s-2),$$

vamos determinar A, B e C tais que

$$\frac{s^2 + 3s - 6}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2}.$$

Realizando uma conta simples, obtemos $A = -3$, $B = 2$ e $C = 2$. Logo,

$$\frac{s^2 + 3s - 6}{s(s-1)(s-2)} = \frac{-3}{s} + \frac{2}{s-1} + \frac{2}{s-2}.$$

Exercício 7.1 *Resolva cada um dos PVI abaixo.*

1. $y'' - 3y' + 2y = 0, \;\; y(0) = 3, \;\; y'(0) = 4.$
2. $y'' + y = t, \;\; y(0) = -1, \;\; y'(0) = 3.$
3. $y'' + y' - y = 4\exp(t), \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$
4. $2y'' + 50y = 100\sin(\omega t), \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0.$
5. $y'' + 4y' + 8y = 0, \;\; y(0) = 2, \;\; y'(0) = 0.$

Segue que a determinação de $\mathcal{L}^{-1}(F)$ agora é mais fácil. De fato,

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(s) = -3 + 2\exp(t) + 2\exp(2t).$$

Outro exemplo, decomponha

$$F(s) = \frac{1}{s^3 - s}.$$

Segundo caso: Fatores Lineares Repetidos: Se $Q(s)$ tem fatores lineares repetidos, a cada fator linear repetido $ax+b$ que aparece n vezes no denominador, corresponde uma soma de n frações parciais da forma

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax^+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax^+b)^n},$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são constantes a serem determinadas.

Por simplicidade vamos supor que $Q(s)$ tem um único fator linear $(s-a)$ repetido $m=2$ vezes, isto é, em $Q(s)$ aparece o fator $(s-a)^m$. Neste caso $Q(s)$ tem a forma

$$Q(s)=(s-a)^m(s-b_1)\cdots(s-b_n),$$

e então devemos procurar por constantes $A_1, A_2, B_1, \ldots, B_n$ tais que

$$F(s)=\frac{A_1}{s-a}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\frac{B_1}{s-b_1}+\cdots+\frac{B_n}{s-b_n}.$$

Se existem mais termos lineares repetidos devemos incluir termos como os dois primeiros da igualdade acima.

Como exemplo, decomponha

$$F(s)=\frac{s}{(s-1)^2}.$$

Como o denominador tem fatores lineares repetidos, $Q(s)=(s-1)^2$, vamos determinar A e B

$$\frac{s}{(s-1)^2}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}.$$

Realizando uma conta simples, obtemos $A=B=1$. Logo, temos que

$$\frac{s}{(s-1)^2}=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}.$$

Segue que

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(s)=t\exp(t)+\exp(t).$$

Outro exemplo, decomponha

$$F(s)=\frac{s^2-1}{(s-2)^2(s+3)}.$$

Terceiro caso: Fatores distintos do segundo grau: A cada fator do segundo grau irredutível $ax^2 + bx + c$ que aparece uma vez no denominador, corresponde uma fração parcial da forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c},$$

onde A, B e C são constantes a serem determinadas.

Quarto caso: Fatores repetidos de segundo grau: A cada fator do segundo grau irredutível $ax^2 + bx + c$ que aparece n vezes no denominador, corresponde uma soma de n frações parciais da forma

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_n x + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

onde A_i, B_i são constantes a serem determinadas.

Na teoria da transformada de Laplace sempre é possível usar números complexos.

8 Teorema da Convolução

Uma questão que surge naturalmente é como expressar $\mathcal{L}^{-1}[FG]$. É isto que vamos tentar responder agora.

Dadas funções f e g, representamos a convolução entre elas por $f * g$ e definimos por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du.$$

Note que valem as seguintes propriedades de demonstração imediata:

(a)$f * g = g * f$

(b)$f * (g + h) = f * g + f * h$

(c)$f * (kg) = k(f * g), \ \forall k \in \mathbb{R}$

(d)$1 * f = \int_0^t f(u)du$

(e) $1 * f' = f(t) - f(0)du$

Teorema 8.1 (Teorema da Convolução) *Sejam f e g contínuas por partes e de ordem exponencial tais que $F(s) = \mathcal{L}[f]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g]$. Então, vale a seguinte relação*

$$\mathcal{L}^{-1}[FG] = f * g.$$

Como exemplo,consideremos $F(s) = \frac{1}{s^2}$ e $G(s) = \frac{1}{s^2+1}$ e $Y(s) = F(s)G(s)$. Vamos determinar $y(t)$ tal que $\mathcal{L}[y] = Y$.

Notemos que $\mathcal{L}[t] = F$ e $\mathcal{L}[\sin(t)] = G$. Pelo teorema da convolução, temos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+1}\right] \\ &= \int_0^t (t-u)\sin(u)du \\ &= -(t-u)\cos(u) - \sin(u)|_0^t \\ &= -\sin(t) + t. \end{aligned}$$

9 Aplicações a EDO's

Agora vamos utilizar as propriedades do operador $\mathcal{L}$ para obter soluções de algumas EDO's simples.

A- Considere o PVI dado por

$$\begin{aligned} &y'' - y = 1, \\ &y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1. \end{aligned}$$

Aplicando $\mathcal{L}$ a equação obtemos

$$\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[1].$$

Usando o Teorema 5 obtemos

$$s^2\mathcal{L}[y] - 1 - \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s}.$$

Logo,

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.$$

Novamente usando o Teorema 5 temos que

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\exp(t)] - \mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[\exp(t) - 1],$$

de onde segue que

$$y(t) = \exp(t) - 1.$$

B- Considere o PVI dado por

$$\begin{aligned} & y'' + y' - 2y = 4\exp(t) + 1, \\ & y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0. \end{aligned}$$

Aplicando $\mathcal{L}$ dos dois lados da equação e usando as propriedade obtemos obtemos

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s+1}{s^2+s-2} + \left(\frac{4}{s-1} + \frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{(s^2+s-2}\right).$$

Como $s^2 + s - 2 = (s+2)(s-1)$, podemos escrever

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} + \frac{4}{(s-1)^2(s+2)} + \frac{1}{s(s-1)(s+2)}.$$

Usando frações parciais, devemos determinar constantes A, B, C e D tais que

$$\frac{s+1}{(s+2)(s-1)} + \frac{4}{(s-1)^2(s+2)} + \frac{1}{s(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{s-1}.$$

Uma conta simples mostra que $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{17}{18}$, $C = \frac{4}{3}$ e $D = \frac{5}{9}$.

A Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$, obtemos

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{17}{18}\exp(-2t) + \frac{4}{3}t\exp(t) + \frac{5}{9}\exp(t).$$

C- Considere o PVI dado por

$$\begin{aligned} & y'' + 4y' + 13y = 2t + 3\exp(-2t)\cos(3t), \\ & y(0) = 0, \;\; y'(0) = -1. \end{aligned}$$

Aplicando $\mathcal{L}$ dos dois lados da equação e usando as propriedade obtemos

$$\mathcal{L}[y] = -\frac{1}{s^2+4s+13} + \frac{2}{s^2(s^2+4s+13)} + \frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2}.$$

Aplicando frações parciais e $\mathcal{L}^{-1}$, obtemos

$$y(t) = -\frac{179}{507}\exp(-2t)\sin(3t) + \frac{8}{169}\exp(-2t)\cos(3t) + \frac{1}{2}t\exp(-2t)\sin(3t) + \frac{2}{13}t - \frac{8}{169}.$$

Exercício 9.1 *Resolva cada um dos PVI abaixo.*

1. $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 3, \ y'(0) = 4.$

2. $y'' + y = t, \quad y(0) = -1, \ y'(0) = 3.$

3. $y'' + y' - y = 4\exp(t), \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$

4. $2y'' + 50y = 100\sin(\omega t), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0.$

5. $y'' + 4y' + 8y = 0, \quad y(0) = 2, \ y'(0) = 0.$

10 Métodos para determinar a transformada inversa de Laplace

Um dos métodos mais simples para determinar a transformada inversa de Laplace é usar o método das frações parciais juntamente com a tabela de valores da transformada de Laplace. Este foi o método utilizado até aqui.

Outro método muito útil é o método das séries de potências negativas. Se $F(s)$ tem um desenvolvimento em séries de potências negativas (cuidado! precisamos de condições adicionais) dado por

$$F(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \ldots + \frac{a_n}{s^{n+1}} + \ldots$$

então podemos inverter termo a termo para obter

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots.$$

Existe uma fórmula explícita para a transformação inversa de Laplace, mas ela envolve integração sobre um contorno no plano complexo, chamado de contorno de Bromwich.

A título de curiosidade apresentamos a sua expressão aqui:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \mathrm{e}^{st} F(s)\, ds, \ t > 0$$

e $F(t) = 0$ se $t < 0$. Esta integral deve ser calculada ao longo de uma reta $s = \gamma$ no plano complexo, onde $s = x + iy$. O número real γ deve ser escolhido de modo que $s = \gamma$ esteja à direita de todas as singularidades.

11 Aplicação a sistemas de EDO's

Como exemplo, vamos considerar o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias.

Resolva o seguinte sistema de EDO's

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x, \\ x(0) = 8, y(0) = 3. \end{cases}$$

Se $\mathcal{L}[x] = X$ e $\mathcal{L}[y] = Y$, então tomando a transformada de Laplace nas duas equações e usando as condições iniciais, temos

$$\begin{aligned} sX - 8 &= 2X - 3Y \\ sY - 3 &= Y - 2X. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema linear, obtemos

$$X = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4},$$

$$Y = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}.$$

De onde segue que

$$x(t) = 5\exp(-t) + 3\exp(4t),$$

$$y(t) = 5\exp(-t) - 2\exp(4t).$$

Índice Remissivo

Referências

[1] M. R.Spiegel, Transformadas de Laplace. McGraw-Hill do Brasil, 1976.