Transformada de Laplace e aplicações

This woksheet is in Portuguese language.

Prof. Doherty Andrade

Nesta woksheet está todo o material visto comumnete em um curso elementar sobre transformada de Laplace.
Use-o como uma revisão, mas não esqueça de lapis e papel.

Transformada de Laplace

Teorema (Existencia da Transformada de Laplace) Se $f(t)$ é de ordem exponencial, então sua transformada de Laplace $Lf(t) = F(s)$ é dada por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt .$$

A integral definindo $F(s)$ existe nos pontos $\tau < s$.

Teorema (Linearidade da Transformada de Laplace) Sejam $f(t)$ e $g(t)$ tendo transformada de Laplace dadas por $F(s)$ e $G(s)$, respectivamente. Se a e b são constantes, então $L(a\, f(t) + b\, g(t)) = a\, F(s) + b\, G(s)$.

Teorema (Unicidade da Transformada de Laplace) Sejam $f(t)$ e $g(t)$ tendo Transformada de Laplace dadas por $F(s)$ e $G(s)$, respectivamente. Se $F(s) = G(s)$ então $f(t) = g(t)$.

Para trabalhar com Transformada de Laplace no Maple, você precisa carregar os procedimentos "Laplace transform" .
Faça isto com

```
> with(inttrans):
```

Exemplo 1 Determine a transformada de Laplace da função degrau unitário.
$f(t) = 1$ se $0 \le t < c$,
$f(t) = 0$ se $c < t$.

```
> c:='c': f:='f': F:='F': g:='g': s:='s': t:='t': T:='T':
  f0 := t -> 1:
  g := t -> subs(T=t, int(f0(T)*exp(-s*T),T)):
  F := t -> subs(T=t, int(f0(T)*exp(-s*T),T=0..c)):
  `For 0 <= t <= c,  f(t) ` = f0(t);
  Int(f(t)*exp(-s*t),t) = g(t);
  `F(s) = `, Int(f(t)*exp(-s*t),t=0..c) = F(s);
  `F(s) ` = simplify(F(s));
```

$$\textit{For 0 <= t <= c, f(t)} = 1$$

$$\int f(t)\, e^{-st}\, dt = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$F(s) = , \int_0^c f(t)\, e^{-st}\, dt = -\frac{-1+e^{-sc}}{s}$$

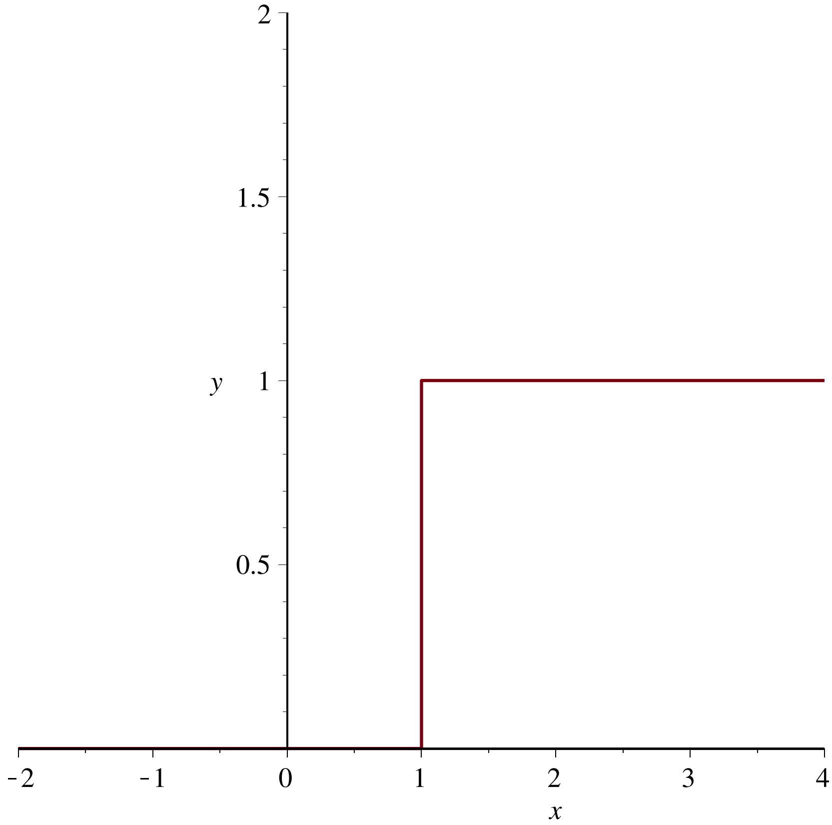
$$F(s) = -\frac{-1+e^{-sc}}{s} \tag{1.1}$$

Veja o gráfico de f.

```
> f:=x -> piecewise(x>1,1);#tomei c=1 aqui
```

$$f := x \rightarrow piecewise(1 < x, 1) \tag{1.2}$$

```
> with(plots):
> plot(f(x),x=-2..4,y=0..2);
```



Exemplo 2 Determine a transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$.

```
> a:='a': f:='f': F:='F': g:='g': s:='s': t:='t': T:='T':
  f0 := t -> exp(a*t):
  `f(t) ` = f0(t);
  g := proc(t,S)
    simplify(subs(T=t,int(f0(T)*exp(-S*T),T)))
  end:
```

```
Int(f(t)*exp(-s*t),t) = g(t,s);
`F(s) ` = subs(T=t, int(f0(T)*exp(-s*T),T=0..infinity));
`F(s) ` = simplify(g(infinity,s) - g(0,s));
F := s -> - subs(S=s, g(0,S)):
`F(s) ` = F(s);
```

$$f(t) = e^{a t}$$

$$\int f(t)\, e^{-s t}\, dt = \frac{e^{t(a-s)}}{a-s}$$

$$F(s) = \lim_{t \to \infty} \frac{e^{a t - s t} - 1}{a-s}$$

$$F(s) = \frac{e^{\infty (a-s)} - 1}{a-s}$$

$$F(s) = \frac{1}{-a+s} \tag{1.3}$$

```
> `f(t) ` = exp(a*t);
  `F(s) ` = laplace(exp(a*t), t, s);
```

$$f(t) = e^{a t}$$

$$F(s) = \frac{1}{-a+s} \tag{1.4}$$

Exemplo 3 Determine a transformada de Laplace de $f(t) = \sinh(a\,t)$.

Como $f(t) = \sinh(at) = \dfrac{e^{a t} - e^{-a t}}{2}$, usamos que

$L_1(e^{a t}) = \dfrac{1}{s-a}$ e $L_2(e^{-a t}) = \dfrac{1}{s+a}$.

```
> L:='L':
  `f(t) ` = sinh(a*t);
  `f(t) ` = (exp(a*t)-exp(-a*t))/2;
  L1 :=laplace( exp(a*t), t, s):
  L2 :=laplace(exp(-a*t), t, s):
  L(exp(a*t)) = L1;
  L(exp(-a*t)) = L2; ` `;
  `F(s) ` = (L(exp(a*t)) - L(exp(-a*t)))/2;
  `F(s) ` = (L1 - L2)/2;
  `F(s) ` = simplify((L1 - L2)/2);
```

$$f(t) = \sinh(a\,t)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{a t} - \frac{1}{2} e^{-a t}$$

$$L(e^{a t}) = \frac{1}{-a+s}$$

$$L(e^{-a t}) = \frac{1}{s+a}$$

$$F(s) = \frac{1}{2}\, L(e^{a t}) - \frac{1}{2}\, L(e^{-a t})$$
$$F(s) = \frac{1}{2\,(-a+s)} - \frac{1}{2\,(s+a)}$$
$$F(s) = -\frac{a}{a^2 - s^2} \tag{1.5}$$

Podemos verificar este resultado usando as rotinas do Maple.

```
> `f(t) ` = sinh(a*t);
  `F(s) ` = laplace(sinh(a*t), t, s);
```

$$f(t) = \sinh(a\, t)$$
$$F(s) = \frac{a}{-a^2 + s^2} \tag{1.6}$$

Exemplo 4 Determine a trasnformada de Laplace de $f(t) = t$.

```
> a:='a': f:='f': F:='F': g:='g': s:='s': t:='t': T:='T':
  f0 := t -> t:
  `f(t) ` = f0(t);
  g := proc(t,S)
    simplify(subs(T=t,int(f0(T)*exp(-S*T),T)))
  end:
  Int(f(t)*exp(-s*t),t) = g(t,s);
  `F(s) ` = subs(T=t, int(f0(T)*exp(-s*T),T=0..infinity));
  `F(s) ` = simplify(g(infinity,s) - g(0,s));
  F := s -> - subs(S=s, g(0,S)):
  `F(s) ` = F(s);
```

$$f(t) = t$$
$$\int f(t)\, e^{-s t}\, dt = -\frac{(s\, t + 1)\, e^{-s t}}{s^2}$$
$$F(s) = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{t\, s\, e^{-s t} + e^{-s t} - 1}{s^2} \right)$$
$$F(s) = -\frac{e^{-s\,\infty}\, \infty\, s + e^{-s\,\infty} - 1}{s^2}$$
$$F(s) = \frac{1}{s^2} \tag{1.7}$$

Podemos verificar este resultado usando as rotinas do pacote Transformada de Laplace.

```
> `f(t) ` = t;
  `F(s) ` = laplace(t, t, s);
```

$$f(t) = t$$
$$F(s) = \frac{1}{s^2} \tag{1.8}$$

Exemplo 5 Determine a transformada de Laplace de $f(t) = \cos(b\, t)$.

```
> a:='a': f:='f': F:='F': g:='g': s:='s': t:='t': T:='T':
```

```
f0 := t -> cos(b*t):
`f(t) ` = f0(t);
g := proc(t,S)
  simplify(subs(T=t,int(f0(T)*exp(-S*T),T)))
end:
Int(f(t)*exp(-s*t),t) = g(t,s);
`F(s) ` = subs(T=t, int(f0(T)*exp(-s*T),T=0..infinity));
`F(s) ` = simplify(g(infinity,s) - g(0,s));
F := s -> - subs(S=s, g(0,S)):
`F(s) ` = F(s);
```

$$f(t) = \cos(b\,t)$$

$$\int f(t)\,e^{-s\,t}\,dt = -\frac{e^{-s\,t}\,(\cos(b\,t)\,s - \sin(b\,t)\,b)}{b^2+s^2}$$

$$F(s) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{s\,e^{-s\,t}\cos(b\,t) - b\,e^{-s\,t}\sin(b\,t) - s}{b^2+s^2}\right)$$

$$F(s) = -\frac{s\,e^{-s\,\infty}\cos(b\,\infty) - b\,e^{-s\,\infty}\sin(b\,\infty) - s}{b^2+s^2}$$

$$F(s) = \frac{s}{b^2+s^2} \tag{1.9}$$

Verfique este resultado usando as rotinas do Maple.

```
> `f(t) ` = cos(b*t);
  `F(s) ` = laplace(cos(b*t), t, s);
```

$$f(t) = \cos(b\,t)$$

$$F(s) = \frac{s}{b^2+s^2} \tag{1.10}$$

Exemplo 6 Determine a transformada inversa de $F(s) = \dfrac{3\,s+6}{s^2+9}$.

```
> f:='f': F:='F': s:='s': t:='t':
  F0 := s -> (3*s + 6)/(s^2 + 9):
  `F(s) ` = F0(s);
  `F(s) ` = expand(F0(s));
```

$$F(s) = \frac{3\,s+6}{s^2+9}$$

$$F(s) = \frac{3\,s}{s^2+9} + \frac{6}{s^2+9} \tag{1.11}$$

A transformada $F(s)$ é uma combinação linear .

```
> F1 := s/(s^2 + 9):
  F2 := 3/(s^2 + 9):
  F[1](s) = F1;
  F[2](s) = F2;
  `F(s) = `, 3*F[1](s) + 2*F[2](s) = 3*F1 + 2*F2;
```

$$F_1(s) = \frac{s}{s^2+9}$$
$$F_2(s) = \frac{3}{s^2+9}$$
$$F(s) = , 3\,F_1(s) + 2\,F_2(s) = \frac{3\,s}{s^2+9} + \frac{6}{s^2+9} \qquad (1.12)$$

A inversa de $F_1(s)$ é $\cos(3\,t)$ e a inversa de $F_2(s)$ é $\sin(3\,t)$.

```
> f1 := invlaplace(F1, s, t):
  f2 := invlaplace(F2, s, t):
  f[1](t) , ` = L^-1 (F1(s)) ` = f1;
  f[2](t) , ` = L^-1 (F2(s)) ` = f2;
```

$$f_1(t), \ = L\text{^-}1\ (F1(s)) = \cos(3\,t)$$
$$f_2(t), \ = L\text{^-}1\ (F2(s)) = \sin(3\,t) \qquad (1.13)$$

Portanto $f(t) = 3\,f_1(t) + 2\,f_2(t) = 3\cos(3\,t) + 2\sin(3\,t)$.

```
> `f(t) = `, 3*f[1](t) + 2*f[2](t) = 3*f1 + 2*f2;
```

$$f(t) = , 3\,f_1(t) + 2\,f_2(t) = 3\cos(3\,t) + 2\sin(3\,t) \qquad (1.14)$$

Podemos verificar isto usando os procedimentos do Maple.

```
> `F(s) ` = (3*s + 6)/(s^2 + 9);
  `f(t) ` = invlaplace((3*s + 6)/(s^2 + 9), s, t);
```

$$F(s) = \frac{3\,s+6}{s^2+9}$$
$$f(t) = 3\cos(3\,t) + 2\sin(3\,t) \qquad (1.15)$$

Transformada de Laplace de derivadas e integrais

Teorema (Derivada de f(t)) Seja $f(t)$ e $f'(t)$ contínuas em $0 \le t$,
e de ordem exponencial. Então, $L(f'(t)) = s\,F(s) - f(0)$, onde $L(f(t)) = F(s)$.

Teorema (Integração de f(t)) Seja $f(t)$ e $f'(t)$ contínuas para $0 \le t$,
e de ordem exponencial . Então, $L\left(\int f(t)\,dt\right) = \frac{F(s)}{s}$, onde $L(f(t)) = F(s)$.

Carregue os procedimentos para transformada de Laplace. Faça isto com.

```
> with(inttrans):
```

Exemplo 1 Determine $L\left(\cos(t)^2\right)$.

```
> f:='f': F:='F': s:='s': t:='t': T:='T':
  f := t -> cos(t)^2:
  f1 := t -> subs(T=t,diff(f(T),T)):
  `f(t) ` = f(t);
  `f(0) ` = f(0);
```

```
`f '(t) ` = f1(t);
```

$$f(t) = \cos(t)^2$$
$$f(0) = 1$$
$$f'(t) = -2\cos(t)\sin(t) \tag{2.1}$$

Use que $L(\sin(2t)) = \dfrac{2}{s^2+4}$.

```
> LDf := - 2/(s^2 + 4):
  LDf = `L(f '(t)) `;
  eqn :=  LDf = s*F(s) - f(0): eqn;
  sol := solve(eqn, F(s)):
  `Resolva para  F(s).`;
  `F(s) ` = sol;
  sol := simplify(sol):
  `F(s) ` = sol;
```

$$-\frac{2}{s^2+4} = L(f'(t))$$
$$-\frac{2}{s^2+4} = s\,F(s) - 1$$
Resolva para F(s).
$$F(s) = \frac{s^2+2}{(s^2+4)\,s}$$
$$F(s) = \frac{s^2+2}{(s^2+4)\,s} \tag{2.2}$$

Verifique isto usando as rotinas para Laplace

```
> `f(t) ` = cos(t)^2;
  `F(s) ` = laplace(cos(t)^2, t, s);
```

$$f(t) = \cos(t)^2$$
$$F(s) = \frac{s^2+2}{(s^2+4)\,s} \tag{2.3}$$

Exemplo 2 Use o teorema acima apra determinar $L(f(t))$,onde

(a) $L(t^2)$.

Como $f'(t) = 2t$ e $L(2t) = \dfrac{2}{s^2}$.

```
> f:='f': F:='F': s:='s': t:='t':
  f := t -> t^2:
  f1 := t -> subs(T=t,diff(f(T),T)):
  `f(t) ` = f(t);
  `f '(t) ` = f1(t);
  LDf := laplace(f1(t), t, s):
```

```
`L(f '(t)) ` = LDf;
Lf := LDf/s:
`F(s) = L(f '(t))/s ` = Lf;
```

$$f(t) = t^2$$
$$f\,'(t) = 2\,t$$
$$L(f\,'(t)) = \frac{2}{s^2}$$
$$F(s) = L(f\,'(t))/s = \frac{2}{s^3} \quad \mathbf{(2.4)}$$

Verifique isto com as rotinas do Maple para Laplace.

```
> `f(t) ` = t^2;
  `F(s) ` = laplace(t^2, t, s);
```

$$f(t) = t^2$$
$$F(s) = \frac{2}{s^3} \quad \mathbf{(2.5)}$$

(b) $L(t^3)$.

Como $f\,'(t) = 3\,t^2$ e $L(3\,t^2) = \frac{6}{s^3}$.

```
> f:='f': F:='F': s:='s': t:='t':
  f := t -> t^3:
  f1 := t -> subs(T=t,diff(f(T),T)):
  `f(t) ` = f(t);
  `f '(t) ` = f1(t);
  LDf := laplace(f1(t), t, s):
  `L(f '(t)) ` = LDf;
  Lf := LDf/s:
  `F(s) = L(f '(t))/s ` = Lf;
```

$$f(t) = t^3$$
$$f\,'(t) = 3\,t^2$$
$$L(f\,'(t)) = \frac{6}{s^3}$$
$$F(s) = L(f\,'(t))/s = \frac{6}{s^4} \quad \mathbf{(2.6)}$$

Verifique isto com as rotinas do Maple.

```
> `f(t) ` = t^3;
  `F(s) ` = laplace(t^3, t, s);
```

$$f(t) = t^3$$
$$F(s) = \frac{6}{s^4} \quad \mathbf{(2.7)}$$

Exemplo 3 Resolver o seguinte problema de valor inicial
$y''(t) + y(t) = 0$ com $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$.

```
> s:='s': t:='t': Y:='Y': Ys:='Ys':
```

```
y0 := 2:
y1 := 3:
F := 0:
`y''(t)  +  y(t)  =  0`;
`y(0) ` = y0,`    y'(0) ` = y1;
eqn :=  s^2*Y(s) - s*y0 - y1 + Y(s) = F: eqn;
sol := simplify(solve(subs(s=S,eqn),Y(S))):
Y := s -> subs(S=s,sol):
`Y(s) ` = Y(s);
```

$$y''(t) + y(t) = 0$$
$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$
$$s^2\,Y(s) - 2\,s - 3 + Y(s) = 0$$
$$Y(s) = \frac{2\,s+3}{s^2+1} \tag{2.8}$$

Usando que $L(\cos(t)) = \dfrac{s}{s^2+1}$ e $L(\sin(t)) = \dfrac{1}{s^2+1}$

vamos determinar a solução que é uma combinação linear de cos(t) e sin(t) .

```
> F1 := s/(s^2+1):
  F2 := 1/(s^2+1):
  `Y(s) ` = 2*F1 + 3*F2;
  f1 := invlaplace(F1, s , t):
  f2 := invlaplace(F2, s , t):
  `f(t) ` = 2*f1 + 3*f2;
```

$$Y(s) = \frac{2\,s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1}$$
$$f(t) = 2\cos(t) + 3\sin(t) \tag{2.9}$$

Podemos usar o Maple para determinar diretamente a inversa.

```
> `Y(s) ` = Y(s);
  `f(t) ` = invlaplace(Y(s), s , t);
```

$$Y(s) = \frac{2\,s+3}{s^2+1}$$
$$f(t) = 2\cos(t) + 3\sin(t) \tag{2.10}$$

Podemos usar os procedimentos do Maple para EDO para obter a solução diretamente.

```
> y:='y': t:='t':
  ODE  := diff(y(t),t$2)+y(t) = 0:
  ICs := {y(0)=2, D(y)(0)=3}:
  `D. E.      ` = ODE;
  `I. C.'s    ` = ICs;
  dsolve(ODE, y(t));
  dsolve({ODE} union ICs, y(t));
```

$$D.\,E. \quad = \left(\frac{d^2}{dt^2}\,y(t) + y(t) = 0\right)$$
$$I.\,C.'s \quad = \{y(0) = 2, D(y)(0) = 3\}$$

$$y(t) = \_C1\sin(t) + \_C2\cos(t)$$
$$y(t) = 2\cos(t) + 3\sin(t) \quad (2.11)$$

Exemplo 4 Resolva o problema de valor inicial
$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$ com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 4$.

```
> s:='s': S:='S': t:='t': Y:='Y':
  y0 := 1:
  y1 := 4:
  F := 0:
  `y''(t)  +  y'(t)  -  2y(t)  =  0`;
  `y(0) ` = y0, `   y'(0) ` = y1;
  eqn :=  s^2*Y(s) - s*y0 - y1 + s*Y(s) - y0 - 2*Y(s) = F:
  eqn;
  sol := simplify(solve(subs(s=S,eqn),Y(S))):
  Y := s -> subs(S=s,sol):
  `Y(s) ` = Y(s);
  `Y(s) ` = convert(Y(s), parfrac, s);
```

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$$
$$s^2 Y(s) - s - 5 + s\,Y(s) - 2\,Y(s) = 0$$
$$Y(s) = \frac{s+5}{s^2+s-2}$$
$$Y(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s+2} \quad (2.12)$$

Usando que $L(e^{-2t}) = \dfrac{1}{s+2}$ e $L(e^{t}) = \dfrac{1}{s-1}$
a solução é combinação linear .

```
> F1 := 1/(s+2):
  F2 := 1/(s-1):
  `Y(s) ` = - F1 + 2*F2;
  f1 := invlaplace(F1, s , t):
  f2 := invlaplace(F2, s , t):
  `f(t) ` = - f1 + 2*f2;
```

$$Y(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s+2}$$
$$f(t) = -e^{-2t} + 2\,e^{t} \quad (2.13)$$

Podemos usar a inversa de Laplace diretamente.

```
> `Y(s) ` = Y(s);
  `f(t) ` = invlaplace(Y(s), s , t);
```

$$Y(s) = \frac{s+5}{s^2+s-2}$$
$$f(t) = -e^{-2t} + 2\,e^{t} \quad (2.14)$$

Podemos verificar isto com o Maple.

```
> y:='y': t:='t':
  ODE  := diff(y(t),t$2)+diff(y(t),t)-2*y(t) = 0:
```

```
ICs := {y(0)=1, D(y)(0)=4}:
`D. E.      ` = ODE;
`I. C.'s    ` = ICs;
dsolve(ODE, y(t));
dsolve({ODE} union ICs, y(t));
```

$$D.\ E. \quad = \left(\frac{d^2}{dt^2}\, y(t) + \frac{d}{dt}\, y(t) - 2\, y(t) = 0 \right)$$

$$I.\ C.'s \quad = \{ y(0) = 1, D(y)(0) = 4 \}$$

$$y(t) = \_C1\, e^{t} + \_C2\, e^{-2\,t}$$

$$y(t) = -e^{-2\,t} + 2\, e^{t} \tag{2.15}$$

Exemplo 5 Resolva o problema de valor inicial
$y''(t) - 3\, y'(t) + 2y(t) = 0$ com $y(0) = -1$ e $y'(0) = 4$.

```
> s:='s': S:='S': t:='t': Y:='Y':
  y0 := -1:
  y1 := 4:
  F := 0:
  `y''(t)  -3y'(t)  +  2y(t)  =  0`;
  `y(0) ` = y0, `    y'(0) ` = y1;
  eqn :=  s^2*Y(s) - s*y0 - y1 -3*(s*Y(s) - y0) + 2*Y(s) = F:
  eqn;
  sol := simplify(solve(subs(s=S,eqn),Y(S))):
  Y := s -> subs(S=s,sol):
  `Y(s) ` = Y(s);
  `Y(s) ` = convert(Y(s), parfrac, s);
```

$$y''(t) \; -3y'(t) \; + \; 2y(t) = \; 0$$

$$y(0) \; = -1, \quad y'(0) \; = 4$$

$$s^2\, Y(s) + s - 7 - 3\, s\, Y(s) + 2\, Y(s) = 0$$

$$Y(s) \; = -\frac{s - 7}{s^2 - 3\, s + 2}$$

$$Y(s) \; = -\frac{6}{s - 1} + \frac{5}{s - 2} \tag{2.16}$$

Usando que $L(e^{t}) = \dfrac{1}{s - 1}$ e $L(e^{t}) = \dfrac{1}{s - 1}$
a solução é combinação linear .

```
> F1 := 1/(s+2):
  F2 := 1/(s-1):
  `Y(s) ` = - F1 + 2*F2;
  f1 := invlaplace(F1, s , t):
  f2 := invlaplace(F2, s , t):
  `f(t) ` = - f1 + 2*f2;
```

$$Y(s) \; = \frac{2}{s - 1} - \frac{1}{s + 2} \tag{2.17}$$

$$f(t) = -e^{-2t} + 2e^{t} \quad (2.17)$$

Podemos usar a inversa de Laplace diretamente.

```
> `Y(s) ` = Y(s);
  `f(t) ` = invlaplace(Y(s), s , t);
```

$$Y(s) = -\frac{s-7}{s^2 - 3s + 2}$$

$$f(t) = 5e^{2t} - 6e^{t} \quad (2.18)$$

Podemos verificar isto com o Maple.

```
> y:='y': t:='t':
  ODE  := diff(y(t),t$2)+diff(y(t),t)-2*y(t) = 0:
  ICs := {y(0)=1, D(y)(0)=4}:
  `D. E.      ` = ODE;
  `I. C.'s    ` = ICs;
  dsolve(ODE, y(t));
  dsolve({ODE} union ICs, y(t));
```

$$D.\ E. = \left(\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = 0\right)$$

$$I.\ C.'s = \{y(0) = 1, D(y)(0) = 4\}$$

$$y(t) = \_C1\, e^{t} + \_C2\, e^{-2t}$$

$$y(t) = -e^{-2t} + 2e^{t} \quad (2.19)$$

Teoremas de Deslocamento

Teorema (deslocamento na variável s) Se $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$, então $L\left(e^{at} f(t)\right) = F(s-a)$.

Teorema (deslocamento na variável t) Se $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$, e $0 \le a$, então $L\left(U_a(t)\, f(t-a)\right) = e^{-as} F(s)$.

Carregue o pacote de transformações para trabalhar com o Maple.

```
> with(inttrans):
```

Exemplo 1 Calcule $L\left(t^n e^{at}\right)$

Usando que $L\left(t^n\right) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. e fazemos o deslocamento.

```
> a:='a': f:='f': F:='F': n:='n': s:='s': t:='t':
  f := t -> t^n:
  F := s ->  n!/s^(n+1):
  `formulas dadas:`;
  `f(t) ` = f(t);
  `F(s) ` = F(s);
```

```
`deslocamento na variavel s para obter:`;
`f(t) ` = f(t)*exp(a*t);
`F(s) ` = F(s-a);
```

formulas dadas:

$$f(t) = t^n$$

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

deslocamento na variavel s para obter:

$$f(t) = t^n e^{a t}$$

$$F(s) = \frac{n!}{(-a+s)^{n+1}} \tag{3.1}$$

Podemos verificar isto com o Maple.

```
> assume(A,positive);
  assume(N,positive);
  `Por exemplo, comece com:`;
  `f(t) ` = t^n;
  L := laplace(t^N, t, s):
  `F(s) ` = subs(N='n',L);
  `Deslocamento na variável s para obter:`;
  `f(t) ` = t^n*exp(a*t);
  LS := laplace(t^N*exp(A*t), t, s):
  `F(s) ` = subs({A='a',N='n'},LS);;
```

Por exemplo, comece com:

$$f(t) = t^n$$

$$F(s) = \Gamma(n+1)\, s^{-n-1}$$

Deslocamento na variável s para obter:

$$f(t) = t^n e^{a t}$$

$$F(s) = \Gamma(n+1)\, (-a+s)^{-n-1} \tag{3.2}$$

Exemplo 2 Resolva o PVI

$y''(t) + y(t) = U_{\pi}(t)$ com $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$

```
> s:='s': S:='S': t:='t': Y:='Y': Y:='Y':
  y0 := 0:
  y1 := 0:
  F := laplace(Heaviside(t-Pi), t, s):
  `y''(t)  +  y(t)  =  UPi(t)`;
  `y(0) ` = y0,`   y'(0) ` = y1;
  eqn :=  s^2*Y(s) - s*y0 - y1 + Y(s) = F: eqn;
  sol := simplify(solve(subs(s=S,eqn),Y(S))):
  Y := s -> subs(S=s,sol):
  `Y(s) ` = Y(s);
  1/(s*(s^2+1)) = convert(1/(s*(s^2+1)), parfrac, s);
  `Y(s) ` = exp(-Pi*s)/s - exp(-Pi*s)*s/(s^2+1);
```

$$y''(t) + y(t) = UPi(t)$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$
$$s^2\, Y(s) + Y(s) = \frac{e^{-s\pi}}{s}$$
$$Y(s) = \frac{e^{-s\pi}}{s\,(s^2+1)}$$
$$\frac{1}{s\,(s^2+1)} = -\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s}$$
$$Y(s) = \frac{e^{-s\pi}}{s} - \frac{e^{-s\pi}\, s}{s^2+1} \tag{3.3}$$

Use que $L\big(U_\pi(t)\big) = \dfrac{e^{-\pi s}}{s}$ e $L\big(U_\pi(t)\cos(t-\pi)\big) = \dfrac{e^{-\pi s}\, s}{s^2+1}$.

```
> F1 := exp(-Pi*s)/s:
  F2 := exp(-Pi*s)*s/(s^2+1):
  f1 := invlaplace(F1, s , t):
  f2 := invlaplace(F2, s , t):
  `Y(s) ` = F1 - F2;
  `f(t) ` = f1 - f2;
```

$$Y(s) = \frac{e^{-s\pi}}{s} - \frac{e^{-s\pi}\, s}{s^2+1}$$
$$f(t) = \mathrm{Heaviside}(t-\pi) + \mathrm{Heaviside}(t-\pi)\cos(t) \tag{3.4}$$

Podemos verificar isto usando o Maple.

```
> ODE  := diff(y(t),t$2)+y(t) = Heaviside(t-Pi):
  ICs := {y(0)=0, D(y)(0)=0}:
  `D. E.       ` = ODE;
  `I. C.'s     ` = ICs;
  dsolve(ODE, y(t), method=laplace);
  dsolve({ODE} union ICs, y(t), method=laplace);
```

$$D.\ E. \quad = \left(\frac{d^2}{dt^2}\, y(t) + y(t) = \mathrm{Heaviside}(t-\pi)\right)$$
$$I.\ C.'s \quad = \{y(0) = 0, \mathrm{D}(y)(0) = 0\}$$
$$y(t) = y(0)\cos(t) + \mathrm{D}(y)(0)\sin(t) + 2\,\mathrm{Heaviside}(t-\pi)\cos\left(\frac{1}{2}\,t\right)^2$$
$$y(t) = 2\,\mathrm{Heaviside}(t-\pi)\cos\left(\frac{1}{2}\,t\right)^2 \tag{3.5}$$

Invertendo a Transformada de Laplace

```
> with(inttrans):
  laplace(t,t,s):
```

Exemplo 1 Determine a transrformada inversa de $Y(s) = \dfrac{s^3 - 4s + 1}{s\,(s-1)^3}$.

```
> s:='s': Y:='Y':
  Y := s ->(s^3 - 4*s + 1)/(s*(s-1)^3):
  `Y(s) ` = Y(s);
```

$$Y(s) = \frac{s^3 - 4s + 1}{s(s-1)^3} \tag{4.1}$$

Vamos usar frações parciais para decompor a expressão de Y(s) em faotres mais simples.

```
> s:='s': Y:='Y':
  Y := s ->(s^3 - 4*s + 1)/(s*(s-1)^3):
  `Y(s) ` = Y(s);
  `Y(s) ` = convert(Y(s),parfrac,s);
```

$$Y(s) = \frac{s^3 - 4s + 1}{s(s-1)^3}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s} \tag{4.2}$$

Usamos a tabela de transformada de Laplace para procurar a inversa e obtemos a solução:
$f(t) = -1 - t^2 e^t + t e^t + 2 e^t$

Podemos usar o Maple para conferir.

```
> `F(s) ` = (s^3 - 4*s + 1)/(s*(s-1)^3);
  `f(t) ` = invlaplace((s^3 - 4*s + 1)/(s*(s-1)^3), s, t);
```

$$F(s) = \frac{s^3 - 4s + 1}{s(s-1)^3}$$

$$f(t) = -1 - e^t (t+1)(t-2) \tag{4.3}$$

Exemplo 2 Determine a transformada inversa de $F(s) = \dfrac{5s}{(s^2+4)(s^2+9)}$.

```
> s:='s': Y:='Y':
  Y := s -> 5*s/((s^2+4)*(s^2+9)):
  `Y(s) ` = Y(s);
```

$$Y(s) = \frac{5s}{(s^2+4)(s^2+9)} \tag{4.4}$$

Podemos usar o Maple para converter em frações parciais.

```
> s:='s': Y:='Y':
  Y := s -> 5*s/((s^2+4)*(s^2+9)):
  `Y(s) ` = Y(s);
  `Y(s) ` = convert(Y(s),parfrac,s);
```

$$Y(s) = \frac{5s}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+9} \tag{4.5}$$

Use a tabela de transformadad e Laplace para determinar a inversa:

$y(t) = \cos(2\,t) - \cos(3\,t)$.

Exemplo 3 Determine a transformada inversa de $Y(s) = \dfrac{s^3 + 3\,s^2 - s + 1}{s\,(s+1)^2\,(s^2+1)}$.

Em fraçoes parciais temos

```
> s:='s': Y:='Y':
  Y := s ->(s^3+3*s^2-s+1)/(s*(s+1)^2*(s^2+1)):
  `Y(s) ` = Y(s);
  `Y(s) ` = convert(Y(s),parfrac,s);
```

$$Y(s) = \frac{s^3 + 3\,s^2 - s + 1}{s\,(s+1)^2\,(s^2+1)}$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+1} - \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s} \tag{4.6}$$

Usando uma tabela de transformada de Laplace temos que a resposta é:
$y(t) = 1 - 2\,t\,\mathrm{e}^{-t} - 2\,\mathrm{e}^{-t} + \cos(t) + \sin(t)$.

Exemplos de PVI

```
> with(inttrans):
```

Exemplo 1 Resolva o problema de valor inicial
$y''(t)$ $-3\,y'(t)$ $+ 2y(t) = 0$ com $y(0) = 3$ e $y'(0) = 4$.

```
> s:='s': S:='S': t:='t': Y:='Y':
  y0 := 3:
  y1 := 4:
  F := 0:
  `y''(t)  -3y'(t)  +  2y(t)  =  0`;
  `y(0) ` = y0, `   y'(0) ` = y1;
  eqn :=  s^2*Y(s) - s*y0 - y1 -3*(s*Y(s) - y0) + 2*Y(s) = F:
  eqn;
  sol := simplify(solve(subs(s=S,eqn),Y(S))):
  Y := s -> subs(S=s,sol):
  `Y(s) ` = Y(s);
  `Y(s) ` = convert(Y(s), parfrac, s);
```

$$y''(t)\ -3y'(t)\ + 2y(t) = 0$$

$$y(0) = 3,\quad y'(0) = 4$$

$$s^2\,Y(s) - 3\,s + 5 - 3\,s\,Y(s) + 2\,Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{3\,s - 5}{s^2 - 3\,s + 2}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-2} \tag{5.1}$$

Usando que $L(\mathrm{e}^t) = \dfrac{1}{s-1}$ e $L(\mathrm{e}^t) = \dfrac{1}{s-1}$

a solução é combinação linear .

```
> F1 := 1/(s-2):
  F2 := 1/(s-1):
  `Y(s) ` =  F1 + 2*F2;
  f1 := invlaplace(F1, s , t):
  f2 := invlaplace(F2, s , t):
  `f(t) ` =  f1 + 2*f2;
```

$$Y(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-2}$$

$$f(t) = e^{2t} + 2\,e^{t} \tag{5.2}$$

Podemos usar a inversa de Laplace diretamente.

```
> `Y(s) ` = Y(s);
  `f(t) ` = invlaplace(Y(s), s , t);
```

$$Y(s) = \frac{3\,s-5}{s^2-3\,s+2}$$

$$f(t) = e^{2t} + 2\,e^{t} \tag{5.3}$$

Podemos verificar isto com o Maple.

```
> y:='y': t:='t':
  ODE  := diff(y(t),t$2)-3*diff(y(t),t)+2*y(t) = 0:
  ICs := {y(0)=3, D(y)(0)=4}:
  `D. E.      ` = ODE;
  `I. C.'s    ` = ICs;
  dsolve(ODE, y(t));
  dsolve({ODE} union ICs, y(t));
```

$$D.\,E. = \left(\frac{d^2}{dt^2}\,y(t) - 3\left(\frac{d}{dt}\,y(t)\right) + 2\,y(t) = 0\right)$$

$$I.\,C.'s = \{y(0) = 3, D(y)(0) = 4\}$$

$$y(t) = \_C1\,e^{t} + \_C2\,e^{2t}$$

$$y(t) = e^{2t} + 2\,e^{t} \tag{5.4}$$

Exemplo 2 Resolva o problema de valor inicial
$y''(t) - 3\,y'(t) + 2y(t) = 0$ com $y(0) = -1$ e $y'(0) = 4$.

```
> s:='s': S:='S': t:='t': Y:='Y':
  y0 := -1:
  y1 := 4:
  F := 0:
  `y''(t)  -3y'(t)  +  2y(t) =  0`;
  `y(0) ` = y0, `   y'(0) ` = y1;
  eqn :=  s^2*Y(s) - s*y0 - y1 -3*(s*Y(s) - y0) + 2*Y(s) = F:
  eqn;
  sol := simplify(solve(subs(s=S,eqn),Y(S))):
  Y := s -> subs(S=s,sol):
```

```
  `Y(s) ` = Y(s);
  `Y(s) ` = convert(Y(s), parfrac, s);
```

$$y''(t)\ -3y'(t)\ +\ 2y(t) =\ 0$$
$$y(0)\ = -1,\quad y'(0)\ = 4$$
$$s^2\,Y(s) + s - 7 - 3\,s\,Y(s) + 2\,Y(s) = 0$$
$$Y(s)\ = -\frac{s-7}{s^2-3\,s+2}$$
$$Y(s)\ = -\frac{6}{s-1} + \frac{5}{s-2} \tag{5.5}$$

Usando que $L(\mathrm{e}^t) = \dfrac{1}{s-1}$ e $L(\mathrm{e}^t) = \dfrac{1}{s-1}$

a solução é combinação linear .

```
> F1 := 1/(s-2):
  F2 := 1/(s-1):
  `Y(s) ` = -6* F1 + 5*F2;
  f1 := invlaplace(F1, s , t):
  f2 := invlaplace(F2, s , t):
  `f(t) ` = - 6*f1 + 5*f2;
```

$$Y(s)\ = -\frac{6}{s-2} + \frac{5}{s-1}$$
$$f(t)\ = -6\,\mathrm{e}^{2\,t} + 5\,\mathrm{e}^{t} \tag{5.6}$$

Podemos usar a inversa de Laplace diretamente.

```
> `Y(s) ` = Y(s);
  `f(t) ` = invlaplace(Y(s), s , t);
```

$$Y(s)\ = -\frac{s-7}{s^2-3\,s+2}$$
$$f(t)\ = 5\,\mathrm{e}^{2\,t} - 6\,\mathrm{e}^{t} \tag{5.7}$$

Podemos verificar isto com o Maple.

```
> y:='y': t:='t':
  ODE  := diff(y(t),t$2)-3*diff(y(t),t)+2*y(t) = 0:
  ICs := {y(0)=-1, D(y)(0)=4}:
  `D. E.      ` = ODE;
  `I. C.'s    ` = ICs;
  dsolve(ODE, y(t));
  dsolve({ODE} union ICs, y(t));
```

$$D.\ E.\ \ = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,y(t) - 3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,y(t)\right) + 2\,y(t) = 0\right)$$
$$I.\ C.'s\ \ = \{y(0) = -1, \mathrm{D}(y)(0) = 4\}$$
$$y(t) = \_C1\,\mathrm{e}^{t} + \_C2\,\mathrm{e}^{2\,t}$$
$$y(t) = 5\,\mathrm{e}^{2\,t} - 6\,\mathrm{e}^{t} \tag{5.8}$$

```
> restart:
> with(inttrans):
```

Exemplo 3 Resolva o problema de valor inicial

$y''(t) + y(t) = t$ com $y(0) = -1$ e $y'(0) = 3$.

```
> s:='s': S:='S': t:='t': Y:='Y':
  y0 := -1:
  y1 := 3:
  F := laplace(t, t , s):
  `y''(t) +  y(t) =  t`;
  `y(0) ` = y0, `   y'(0) ` = y1;
  eqn :=  s^2*Y(s) - s*y0 - y1 +1*Y(s) = F:
  eqn;
  sol := simplify(solve(subs(s=S,eqn),Y(S))):
  Y := s -> subs(S=s,sol):
  `Y(s) ` = Y(s);
  `Y(s) ` = convert(Y(s), parfrac, s);
```

$$y''(t) + y(t) = t$$

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 3$$

$$s^2\,Y(s) + s - 3 + Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = -\frac{s^3 - 3\,s^2 - 1}{s^2\,(s^2+1)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{-s+2}{s^2+1} \tag{5.9}$$

Usando que $L(t) = \frac{1}{s^2}$ e $L(2\sin(t) - \cos(t)) = \frac{s-2}{s^2+1}$

a solução é combinação linear .

```
> F1 := 1/(s^2):
  F2 := (s-2)/(s^2+1):
  `Y(s) ` = F1 -F2;
  f1 := invlaplace(F1, s , t):
  f2 := invlaplace(F2, s , t):
  `f(t) ` = f1 -f2;
```

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{s-2}{s^2+1}$$

$$f(t) = t - \cos(t) + 2\sin(t) \tag{5.10}$$

```
> restart:
> with(inttrans):
```

Exemplo 4 Resolva o problema de valor inicial

$y''(t) + y'(t) - y(t) = 4*exp(t)$ com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

```
> s:='s': S:='S': t:='t': Y:='Y':
  y0 := 1:
  y1 := 0:
  F := laplace(4*exp(t), t , s);
```

```
`y''(t) +  y'(t)-y(t) =  4*exp(t)`;
`y(0) ` = y0, `   y'(0) ` = y1;
eqn :=  s^2*Y(s) - s*y0 - y1 +(s*Y(s) - y0)-1*Y(s) = F:
eqn;
sol := simplify(solve(subs(s=S,eqn),Y(S))):
Y := s -> subs(S=s,sol):
`Y(s) ` = Y(s);
`Y(s) ` = convert(Y(s), parfrac, s);
```

$$F := \frac{4}{s-1}$$

$$y''(t) + y'(t)\text{-}y(t) = 4{*}exp(t)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$s^2\,Y(s) - s - 1 + s\,Y(s) - Y(s) = \frac{4}{s-1}$$

$$Y(s) = \frac{s^2+3}{(s-1)\,(s^2+s-1)}$$

$$Y(s) = \frac{-3\,s-7}{s^2+s-1} + \frac{4}{s-1} \tag{5.11}$$

Usando que

```
> laplace(sinh(t), t , s);
```

$$\frac{1}{s^2-1} \tag{5.12}$$

```
> laplace(cosh(t), t , s);
```

$$\frac{s}{s^2-1} \tag{5.13}$$

```
> solve(x^2+x-1=0);
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \tag{5.14}$$

```
> F1 := 1/(s^2):
  F2 := 7/(s^2+s-1):
  F3 := (3*s)/(s^2+s-1):
> `Y(s) ` = F1 -F2-F3;
  f1 := invlaplace(F1, s , t):
  f2 := invlaplace(F2, s , t):
  f3 := invlaplace(F3, s , t):`f(t) ` = f1 -f2-f3;
```

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{7}{s^2+s-1} - \frac{3\,s}{s^2+s-1}$$

$$f(t) = t - \frac{14}{5}\sqrt{5}\,e^{-\frac{1}{2}t}\sinh\left(\frac{1}{2}\,t\sqrt{5}\right) - \frac{3}{5}\,e^{-\frac{1}{2}t}\left(5\cosh\left(\frac{1}{2}\,t\sqrt{5}\right) - \sqrt{5}\sinh\left(\frac{1}{2}\,t\sqrt{5}\right)\right) \tag{5.15}$$