TransLaplace

August 30, 2022

1 Transformada de Laplace e aplicações

Doherty Andrade –www.metodosnumericos.com.br

A transformada de Laplace de uma função f é dada pela transformação integral definida por

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}s.$$

Talvez a maior aplicação desta transformação integral é na resolução de problemas de valor inicial, pois ela destroi derivadas.

As condições suficientes para a existência de $\mathcal{L}\{f\}$ são:

(a) f é contínua por partes e;

(b) f ser de ordem exponential.

Então, existe um real α tal que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)dt,$$

converge para todos os valores de $s > \alpha$.

Uma importante propriedade utilizada em EDOs é:

$$\mathcal{L}f' = \mathcal{L}[f] - f(0^+), \text{ se } f' \in \mathcal{E}$$

Do mesmo modo,

$$\mathcal{L}f'' = s^2\mathcal{L}[f] - sf(0^+) - f'(0^+), \text{ se } f'' \in \mathcal{E}.$$

A biblioteca Sympy do Python tem a transformada de Laplace já definida. Vamos chamar os pacotes necessários e ver alguns exemplos.

In [1]:
```
import sympy
sympy.init_printing()
```

In [2]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

In [3]:
```
t = sympy.Symbol('t')
s = sympy.Symbol('s')
a = sympy.Symbol('a', real=True, positive=True)
```

Exemplo: determinar a transformada de Laplace de $f(t) = e^{-at}$.

```
In [4]: f = sympy.exp(-a*t)
        f
```

Out[4]:

$$e^{-at}$$

```
In [5]: sympy.laplace_transform(f, t, s)
```

Out[5]:

$$\left(\frac{1}{a+s}, \quad 0, \quad \text{True}\right)$$

Vamos definir a transformada de modo mais pratico

```
In [6]: def L(f):
            return sympy.laplace_transform(f, t, s, noconds=True)
```

```
In [7]: F = L(f)
        F
```

Out[7]:

$$\frac{1}{a+s}$$

A sua inversa também está definida no Sympy.

```
In [8]: def invL(F):
            return sympy.inverse_laplace_transform(F, s, t)
```

```
In [9]: invL(f)
```

Out[9]:

$$e^{-a\Re(t)-ia\Im t}\delta\left(t\right)$$

A função degrau unitário é também conhecida como a função grau de Heaviside. Ela aparece com frequência na transformada inversa de Laplace. É denotada por $\theta(t)$ no pacote sympy.

```
In [10]: sympy.Heaviside(t)
```

Out[10]:

$$\theta\left(t\right)$$

```
In [17]: sympy.plot(sympy.Heaviside(t))
```

Out[17]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x1decdd71a20>

Vamos apresentar uma tabela de transformadas de Laplce.

In [12]:
```
omega = sympy.Symbol('omega', real=True)
exp = sympy.exp
sin = sympy.sin
cos = sympy.cos
functions = [1,
         t,
         t**2,
          t**3,
         exp(-a*t),
         t*exp(-a*t),
         t**2*exp(-a*t),
         sin(omega*t),
         cos(omega*t),
         1 - exp(-a*t),
         exp(-a*t)*sin(omega*t),
         exp(-a*t)*cos(omega*t),
         ]
functions
```

Out[12]:

$$\left[1, \quad t, \quad t^{2}, \quad t^{3}, \quad e^{- a t}, \quad t e^{- a t}, \quad t^{2} e^{- a t}, \quad \sin{\left (\omega t \right)}, \quad \cos{\left (\omega t \right)}, \quad 1 - e^{- a t}, \quad e^{- a t} \sin{\left (\omega t \right)}, \quad e^{- a t} \cos{\left (\omega t \right)}\right]$$

```
In [13]: Fs = [L(f) for f in functions]
         Fs
```

Out[13]:

$$\left[\frac{1}{s}, \quad \frac{1}{s^{2}}, \quad \frac{2}{s^{3}}, \quad \frac{6}{s^{4}}, \quad \frac{1}{a + s}, \quad \frac{1}{\left(a + s\right)^{2}}, \quad \frac{2}{\left(a + s\right)^{3}}, \quad \frac{\omega}{\omega^{2} + s^{2}}, \quad \frac{s}{\omega^{2} + s^{2}}, \quad \frac{a}{s \left(a + s\right)}, \quad \frac{\omega}{\omega^{2} + \left(a + s\right)^{2}}, \quad \frac{a +}{\omega^{2} + (a}\right.$$

Vamos organizar a nossa tabela usando pandas

```
In [14]: from pandas import DataFrame
         def makelatex(args):
             return [" ${}$ " .format(sympy.latex(a)) for a in args]
```

```
In [15]: DataFrame(list(zip(makelatex(functions), makelatex(Fs))))
```

```
Out[15]:                                                  0  \
         0                                              $1$
         1                                              $t$
         2                                          $t^{2}$
         3                                          $t^{3}$
         4                                      $e^{- a t}$
         5                                    $t e^{- a t}$
         6                                $t^{2} e^{- a t}$
         7               $\sin{\left (\omega t \right )}$
         8               $\cos{\left (\omega t \right )}$
         9                                  $1 - e^{- a t}$
         10   $e^{- a t} \sin{\left (\omega t \right )}$
         11   $e^{- a t} \cos{\left (\omega t \right )}$

                                                        1
         0                                   $\frac{1}{s}$
         1                               $\frac{1}{s^{2}}$
         2                               $\frac{2}{s^{3}}$
         3                               $\frac{6}{s^{4}}$
         4                               $\frac{1}{a + s}$
         5                 $\frac{1}{\left(a + s\right)^{2}}$
         6                 $\frac{2}{\left(a + s\right)^{3}}$
         7                $\frac{\omega}{\omega^{2} + s^{2}}$
         8                     $\frac{s}{\omega^{2} + s^{2}}$
         9                   $\frac{a}{s \left(a + s\right)}$
         10   $\frac{\omega}{\omega^{2} + \left(a + s\right...
         11   $\frac{a + s}{\omega^{2} + \left(a + s\right)...
```

```
In [ ]:
```