QuadraturaGauss2

Doherty Andrade

www.metodosnumericos.com.br

1 Raízes e Pesos para quadratura de Gauss

A biblioteca scipy possui uma rotina para integração chamada de integrate que inclui quadratura de Gauss. Mas podemos prograr as diversas quadraturas de Gauss utilizando as abscissas e os pesos dos polinômios ortogonais.

Veja um exemplo de integral. Calcular $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$.

```
In [1]: import numpy as np
        import sympy as sym
        import scipy.integrate as integrate

        f = lambda x : np.exp(-x*x)
        a = -1.; b = 1;

        I = integrate.quad(f,a,b)

        print('O valor da integral e o erro cometido são:',I)
```

```
O valor da integral e o erro cometido são: (1.493648265624854, 1.6582826951881447e-14)
```

1. Gauss-Tchebycheff

A seguir determinamos as abscissas e os pesos para os polinômios de Techebycheff.

```
In [2]: #Gauss-Tchebycheff
        ti, wi, = np.polynomial.chebyshev.chebgauss(5)
        print('As abscissas ti são:',ti)
        print('Os pesos wi são:',wi)
```

```
As abscissas ti são: [ 9.51056516e-01  5.87785252e-01  6.12323400e-17 -5.87785252e-01
 -9.51056516e-01]
Os pesos wi são: [0.62831853 0.62831853 0.62831853 0.62831853 0.62831853]
```

2. Gauss-Legendre

A seguir determinamos as abscissas e os pesos para os polinômios de Legendre.

```
In [3]: ti, wi, = np.polynomial.legendre.leggauss(5)
        print('As abscissas ti são:',ti)
        print('Os pesos wi são:',wi)
```

```
As abscissas ti são: [-0.90617985 -0.53846931  0.          0.53846931  0.90617985]
Os pesos wi são: [0.23692689 0.47862867 0.56888889 0.47862867 0.23692689]
```

3. Gauss-Laguerre

A seguir determinamos as abscissas e os pesos para os polinômios de Laguerre

```
In [4]: #raizes  e pesos gauss-Laguerre
        ti, wi, = np.polynomial.laguerre.laggauss(5)
        print('As abscissas ti são:',ti)
        print('Os pesos wi são:',wi)
```

```
As abscissas ti são: [ 0.26356032  1.41340306  3.59642577  7.08581001 12.64080084]
Os pesos wi são: [5.21755611e-01 3.98666811e-01 7.59424497e-02 3.61175868e-03
 2.33699724e-05]
```

4. Gauss-Hermite

A seguir determinamos as abscissas e os pesos para os polinômios de Hermite.

```
In [5]: #raizes  e pesos gauss-hermite

        ti, wi, = np.polynomial.hermite.hermgauss(5)
        print('As abscissas ti são:',ti)
        print('Os pesos wi são:',wi)
```

```
As abscissas ti são: [-2.02018287 -0.95857246  0.          0.95857246  2.02018287]
Os pesos wi são: [0.01995324 0.39361932 0.94530872 0.39361932 0.01995324]
```

2 Quadratura de Gauss-Legendre

```
In [6]: #quadratura de gauss-Legendre
        from math import exp
        import numpy as np
        from sympy import Symbol, integrate, exp, oo

        def GaussLaguerre(integrando, n):
            x, w = np.polynomial.legendre.leggauss(n)
            S = np.sum(w*integrando(x))
            print('O valor da integral é:', S)
```

Como exemplo, vamos estimar a integral $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$.

```
In [7]: def integrando(x):
            return np.exp(-x*x)

        GaussLaguerre(integrando,11)
```

```
O valor da integral é: 1.4936482656248664
```

3 Quadratura de Gauss-Tchebyceff

```
In [8]: #quadratura de gauss-Tchebycheff
        from math import exp
        import numpy as np
        from sympy import Symbol, integrate, exp, oo

        def Gausschebychev(integrando, n):
            x, w = np.polynomial.chebyshev.chebgauss(n)
            S = np.sum(w*integrando(x))
            print('O valor da integral é:', S)
```

Como exemplo vamos calcular a integral $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2} dx$.

Como o integrando não tem a função peso, precisamos incluí-la. Assim, temos a que integral fica

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2} \sqrt{1-x^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Assim, a função integranda, após a normalização, a ser usada é:

$$\mathrm{e}^{-x^2} \sqrt{1-x^2}.$$

```
In [9]: def integrando(x):
            return np.exp(-x*x)*(1-x**2)**0.5

        Gausschebychev(integrando,11)
```

```
O valor da integral é: 1.4961191204673967
```

4 Quadratura de Gauss-Laguerre

```
In [10]: #quadratura de gauss-Laguerre
         from math import exp
         import numpy as np
         from sympy import Symbol, integrate, exp, oo

         def GaussLaguerre(integrando, n):
             x, w = np.polynomial.laguerre.laggauss(n)
             S = np.sum(w*integrando(x))
             print('O valor da integral é:', S)
```

Exemplo: calcular uma aproximação para a integral

$$\int_0^\infty \frac{4}{1+x^2} dx$$

usando quadratura de Gauss-Laguerre.

Note que o valor exato desta integral imprópria é 2π. Note que a função peso $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$ não está presente no intgrando, então devemos incluí-lo. Assim, temos:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^x \frac{4}{1+x^2} \mathrm{e}^{-x} dx.$$

Logo, após a normalização o integrando é a função $\mathrm{e}^x \frac{4}{1+x^2}$.

Aplicando a técnica de Gauss-Laguerre, temos:

```
In [11]: def integrando(x):
             return np.exp(x)*4./(1. + x*x)

         GaussLaguerre(integrando,11)
```

```
O valor da integral é: 6.1819911883695
```

5 Quadratura de Gauss-Hermite

```
In [12]: #quadratura de gauss-Hermite
         from math import exp
         import numpy as np
         from sympy import Symbol, integrate, exp, oo

         def GaussHermite(integrando, n):
             x, w = np.polynomial.hermite.hermgauss(n)
             S = np.sum(w*integrando(x))
             print('O valor da integral é:', S)
```

Como exemplo, vamos calcular a integral

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{4}{1+x^2} dx.$$

Note que neste caso, o integrando é

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \frac{4}{1+x^2}.$$

```
In [13]: def integrando(x):
             return np.exp(x**2)*4./(1. + x**2)

         GaussHermite(integrando,110)
```

```
O valor da integral é: 12.014149676507875
```