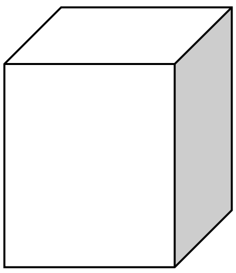
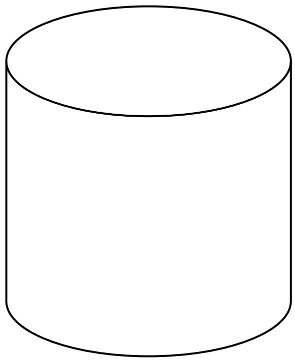
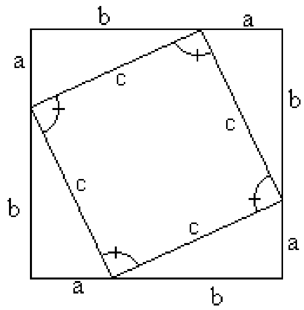
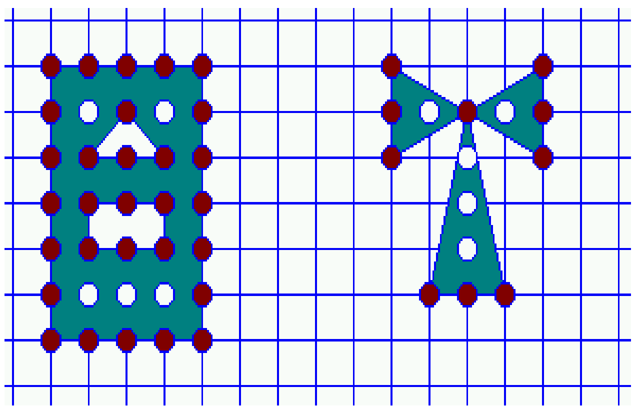
Geometria Euclidiana

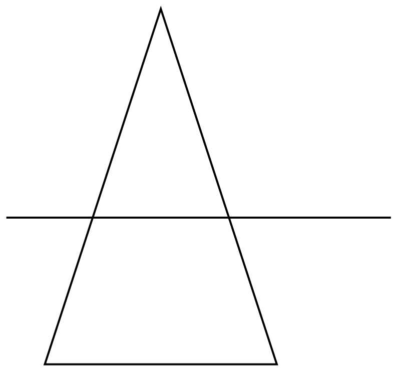
Doherty Andrade – doherty200@hotmail.com











OBJETIVOS:

Rever tópicos fundamentais da geometria elementar; construção de lugares fundamentais; introduzir as simetrias do plano e poliedros. Utilizar softwares no ensino de Geometria.

CONTEÚDO:

PREFÁCIO

A Geometria Euclidiana desempenha um papel importante em todas as séries do ensino fundamental e médio. Ultimamente, a Geometria Euclidiana tem sido deixada de lado e outros aspectos mais operatórios da Matemática têm sido enfatizados. Os alunos das séries iniciais há muito tempo, demonstram indiferença frente à Geometria. Com o computador nas escolas e com o aparecimento de softwares mais amigáveis para o ensino de Geometria, este tópico com certeza ganhará vida nova e ficará mais atraente.

Este texto foi elaborado com a preocupação de deixar a Geometria interessante, porque assim ela o é, sem sacrificar o rigor. O texto é elementar e envolve apenas conteúdos dos níveis fundamental e médio. Surgiu de vários cursos de Geometria oferecidos pelo Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá – Pr, para professores da rede oficial ensino e para alunos da Licenciatura em Matemática e várias vezes reescrito. Não é um texto completo, mas esperamos que seja uma boa introdução à Geometria Euclidiana. Ao final destas notas apresentamos alguns softwares que podem ser utilizados em sala de aula para auxiliar no ensino de Geometria. Não discutimos aqui a metodologia a ser empregado nas aulas de Geometria com o auxílio do computador, mas lembramos que o computador é apenas mais uma poderosa ferramenta de auxílio no ensino de Matemática.

Sugerimos o uso dos softwares, Cinderella, Cabri, Poly e Pick, para ilustrar os principais resultados destas notas. Com os recursos destes programas, pode-se desenhar e animar as construções e verificar as propriedades apresentadas pelos teoremas. Este livro acompanha um CD com os softwares, em versão demonstração, que foram utilizados neste livro e as principais atividades desenvolvidas.

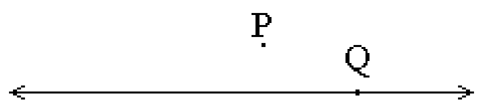
A primeira versão deste texto data de 1985 e foi utilizado em um minicurso oferecido pela UNESP para professores de Matemática da rede pública de ensino do Estado de São Paulo, ocasião em que o teorema de Pick foi introduzido pela primeira vez no Brasil. Depois o texto passou por pequenas correções e melhorias ao longo dos anos.

1. INTRODUÇÃO

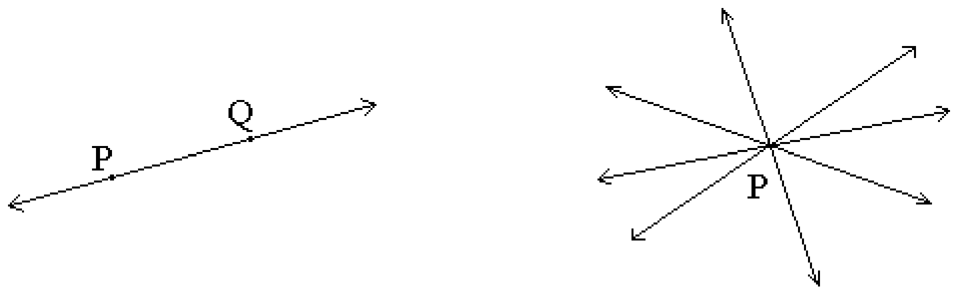
Os objetos elementares do plano são os pontos e as retas. Estes são idéias primitivas. O plano é constituído de pontos e retas, as retas são subconjuntos especiais de pontos distintos do plano. Pontos e retas do plano devem satisfazer a cinco grupos de axiomas que são apresentados no decorrer do texto. Em outras palavras, são propriedades fundamentais aceitas sem demonstrações.

Axiomas de Incidência

AI1 - Qualquer que seja a reta existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.



AI2 - Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

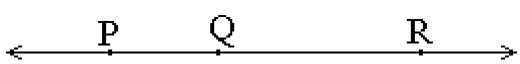


Usaremos letras maiúsculas A, B, C,..., P, Q, R, para denotar pontos e letras minúsculas a, b, c, d,..., m, n, para indicar retas.

O conceito de "um ponto está entre outros dois" é caracterizado pelos axiomas AO1, AO2 e AO3

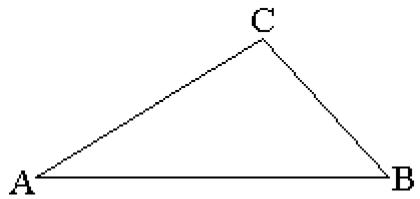
Axiomas de Ordem (AO)

AO1 - Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois.

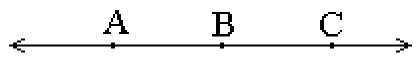


<u>Definição</u> - O conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que se encontram entre A e B é chamado de segmento $\overline{AB}$, A e B são chamados extremos ou extremidades do segmento.

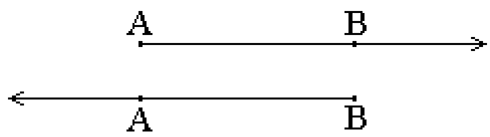
Muitas figuras geométricas são constituídas de segmentos de retas. A mais simples delas é o triângulo, que é formada por três pontos que não pertencem a uma mesma reta e pelos segmentos que os une. Os pontos são chamados vértices do triângulo e os segmentos, de lados do triângulo.



<u>Definição</u> - Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento $\overline{AB}$ e pelos pontos C tais que B está entre A e C, é chamado semi-reta de origem A contendo B, é representada por $\overrightarrow{AB}$.

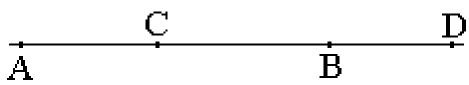


Observe que dois pontos distintos A e B determinam duas semi-retas. A saber: $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$.



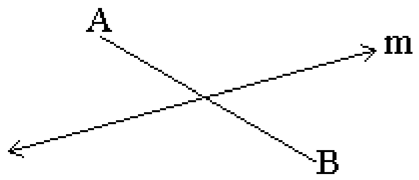
<u>AO2</u> - Dados dois pontos distintos A e B sempre existem:

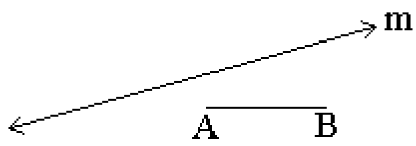
- um ponto C entre A e B
- um ponto D tal que B está entre A e D



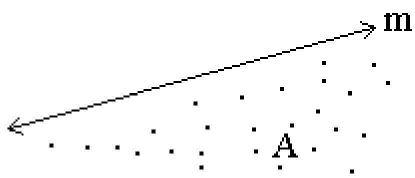
Como conseqüência imediata deste axioma é que, entre dois pontos quaisquer de uma reta, existe uma infinidade de outros pontos.

<u>Definição</u>: Sejam *m* uma reta, A e B pontos fora de *m*. Diremos que A e B estão de um mesmo lado da reta *m* se o segmento $\overline{AB}$ não a intercepta.





<u>Definição</u>: Sejam *m* uma reta e A um ponto fora de *m*. O conjunto de todos os pontos de *m* e de todos os pontos B tais que A e B estão de um mesmo lado da reta m é chamado semi-plano determinado por m e contendo A.



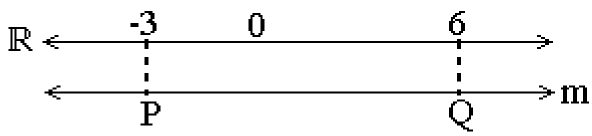
<u>AO3</u> - Uma reta m determina exatamente dois semi-planos distintos cuja interseção é a reta m.

<u>Axiomas sobre medição de segmentos (AM)</u>

<u>AM1</u> - A todo par de pontos do plano corresponde um número real maior ou igual a zero. Este número é zero se, e somente se, os pontos são coincidentes.

O número a que se refere o axioma é chamado <u>distância</u> entre os pontos.

<u>AM2</u> - Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.



De acordo com o axioma AM1, o comprimento de um segmento é sempre não-negativo. Assim se a e b são as coordenadas das extremidades do segmento $\overline{AB}$, o seu comprimento será a diferença entre o maior e o menor dos números. Isto é equivalente a tomar o valor absoluto da diferença dos números em qualquer ordem.

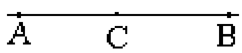
Portanto, podemos rescrever o axioma AM2.

<u>AM2</u> - Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência com os números reais, de modo que:

i) A cada ponto da reta corresponde exatamente um número real.
ii) A cada real corresponde exatamente um ponto da reta.
iii) A distância entre dois pontos quaisquer é o valor absoluto da diferença dos números correspondentes.

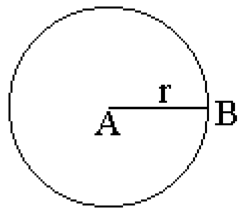
Denotamos o comprimento do segmento $\overline{AB}$ por AB. Uma correspondência do tipo descrito pelo axioma anterior é chamada um "sistema de coordenadas". O número correspondente a um dado ponto é chamado de coordenada do ponto.

<u>AM3</u> - Se o ponto C está entre A e B, então AC+CB=AB.



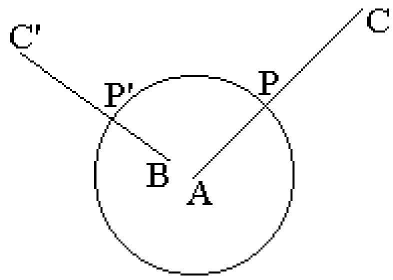
<u>Definição</u>: Chamamos de ponto médio do segmento $\overline{AB}$ ao ponto M deste segmento tal que AM = MB.

<u>Definição</u>: Seja A um ponto do plano e r > 0 um real. A circunferência de centro A e raio $r > 0$ é o conjunto de todos os pontos B do plano, tais que AB = r.



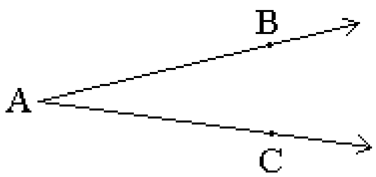
É conseqüência de AM2 que podemos traçar uma circunferência com qualquer centro e raio. Se um ponto C do plano é tal que AC < r, então C é dito estar no interior da circunferência. O conjunto de pontos interiores a circunferência é chamado disco ou círculo de centro A e raio r.

É um fato de que o segmento de reta determinado por um ponto de dentro do círculo e um ponto fora do mesmo tem um ponto em comum com a circunferência.



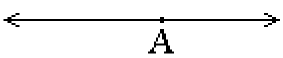
<u>Axiomas sobre medição de Ângulos (AM)</u>

<u>Definição</u>: Chamamos de ângulo a figura formada por duas semi-retas de mesma origem.

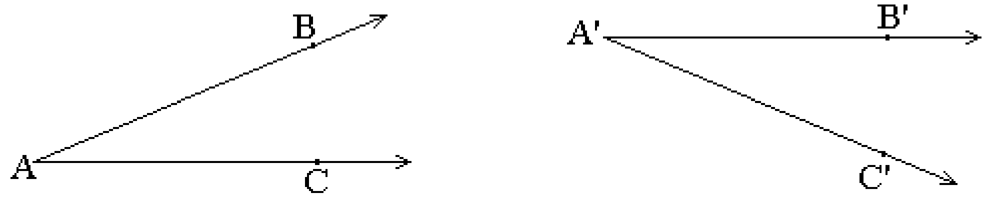


Representamos o ângulo acima por BÂC.

As semi-retas são chamadas de lados e a origem de vértice do ângulo. O ângulo formado por duas semi-retas distintas de uma mesma reta é chamado ângulo raso.



Assim como medimos segmentos com uma régua, medimos ângulos com um transferidor.



A ordem em que os lados são mencionados não faz diferença. Em trigonometria a idéia de ângulo aparece de uma forma diferente. Neste caso, fará diferença qual lado é mencionado em primeiro lugar.

A unidade usada para medir ângulos é o grau. O número de graus de um ângulo é chamado medida deste ângulo. Se existirem r graus no ângulo BÂC, escrevemos mBÂC = r°.

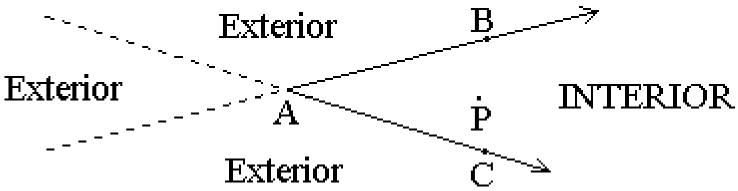
<u>AM4</u> - A todo ângulo BÂC corresponde um número real entre 0 e 180. A todo ângulo raso corresponde o real 180 e a todo ângulo nulo corresponde o real zero.

Ao número real correspondente ao ângulo BÂC denominado medida deste ângulo.

<u>Definição</u>: Seja BÂC um ângulo do plano. Um ponto P está no interior do ângulo BÂC se ocorrer uma das condições:

i) P e B estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$.

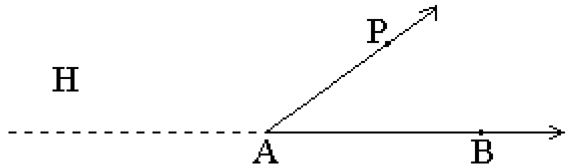
ii) P e C estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$.



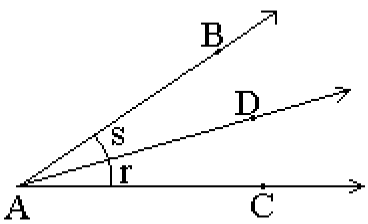
O exterior do ângulo BÂC é o conjunto de pontos do plano que não estão no ângulo ou no seu interior.

Podemos construir um ângulo onde desejarmos, com qualquer medida entre 0 e 180. É claro que se começar com uma semi-reta num plano e um real $0 \leq r \leq 180$, podemos construiu nosso ângulo tanto num como noutro semi-plano determinado pela reta que contém a semi-reta.

<u>AM5</u> - (Construção de ângulos) Seja $\overrightarrow{AB}$ a semi-reta contida num semi-plano H. Para todo real r entre 0 e 180 (inclusive) existe exatamente uma semi-reta $\overrightarrow{AP}$, com P em H, tal que Mpâb = r^o.

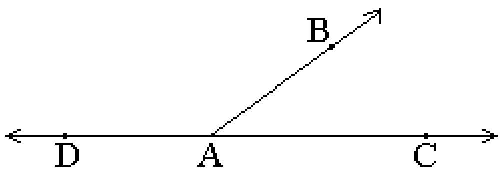


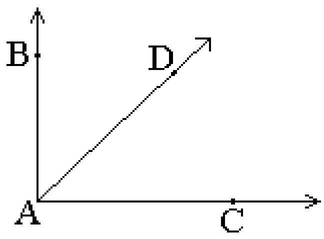
<u>AM6</u> - (Adição de ângulos) Se D está no interior do ângulo BÂC, então mBÂC = mBÂD + mDÂC.



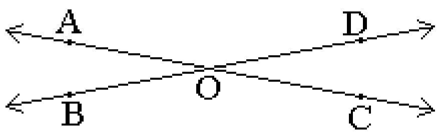
<u>Definição</u>: Dois ângulos são suplementares se a soma de suas medidas é 180^o. Cada um é chamado suplemento do outro.

Dois ângulos são complementares se a soma de suas medidas é 90^o. Cada um é chamado complemento do outro. Um ângulo cuja medida é 90^o é chamado ângulo reto.





Quando duas retas distintas se interceptam formam quatro ângulos. De acordo com a figura os ângulos AÔB e DÔC são chamados opostos pelo vértice. São também opostos pelo vértice os ângulos AÔD e BÔC.



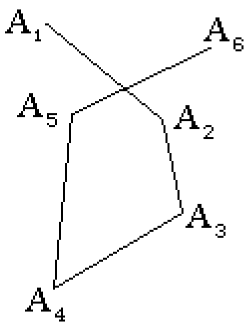
<u>Teorema 1</u> - Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.

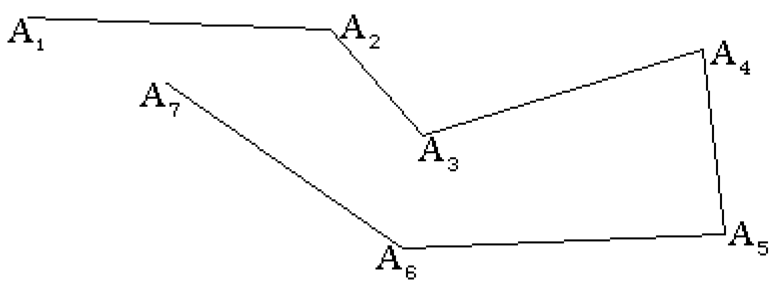
<u>Demonstração</u>: Exercício.

Como atividade, faça uma página usando o Cabri ou usando o Cinderella para ilustrar este resultado.

2. POLÍGONOS

Uma poligonal é uma figura formada por uma seqüência de pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e pelos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$. Os pontos são os vértices e os segmentos são os seus lados.





Um polígono é uma poligonal em que as três condições abaixo são satisfeitas:

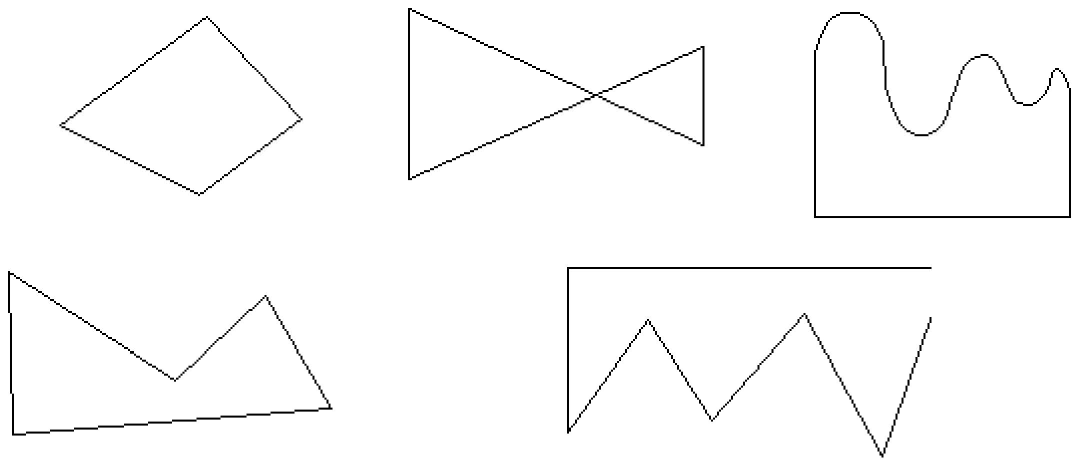
i) $A_n = A_1$

ii) Os lados da poligonal se interceptam somente em suas extremidades.

iii) Dois lados com a mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

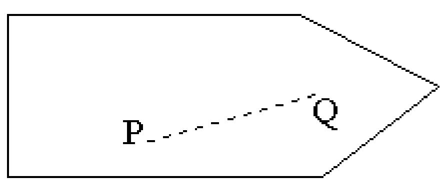
<u>Exemplos</u>

Quais são polígonos?

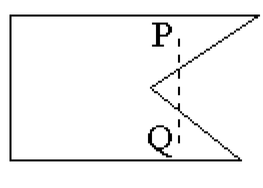


Em outras palavras, um polígono é uma poligonal fechada, sem auto-interseção e com vértices apenas na interseção dos lados.

O segmento ligando vértices não-consecutivos de um polígono é chamado uma diagonal. Um polígono é convexo se dados dois pontos quaisquer do seu interior o segmento de reta que os une está inteiramente contido no polígono.

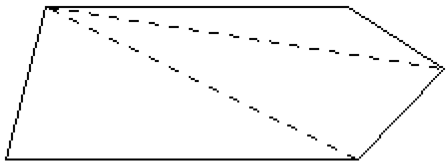


convexo



não-convexo

É comum definir diagonal apenas para polígonos convexos. Não há nada que nos impeça de definir diagonal no caso geral. No entanto, quando o polígono é convexo todas as diagonais caem dentro do polígono.

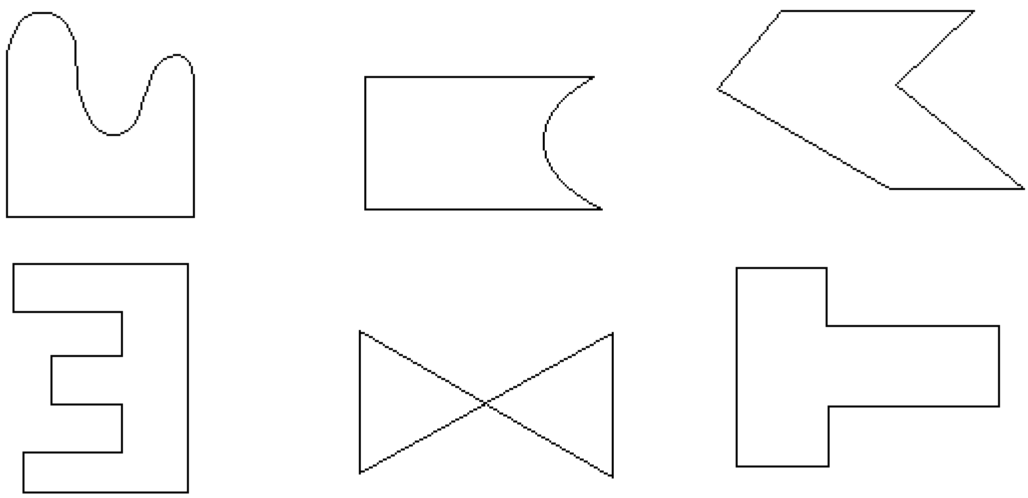


Polígonos convexos recebem denominações especiais de acordo com o número de lados:

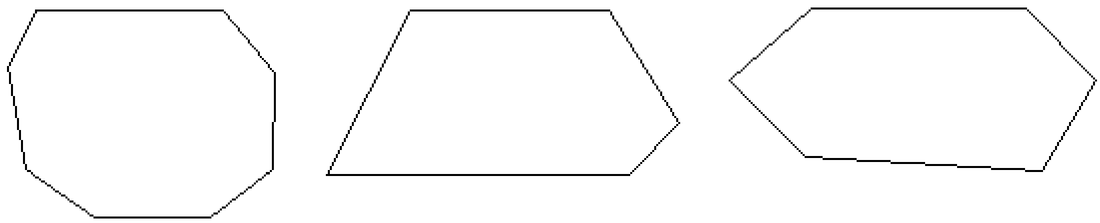
Nº de lados	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Nonágono
10	Decágono

Exercícios

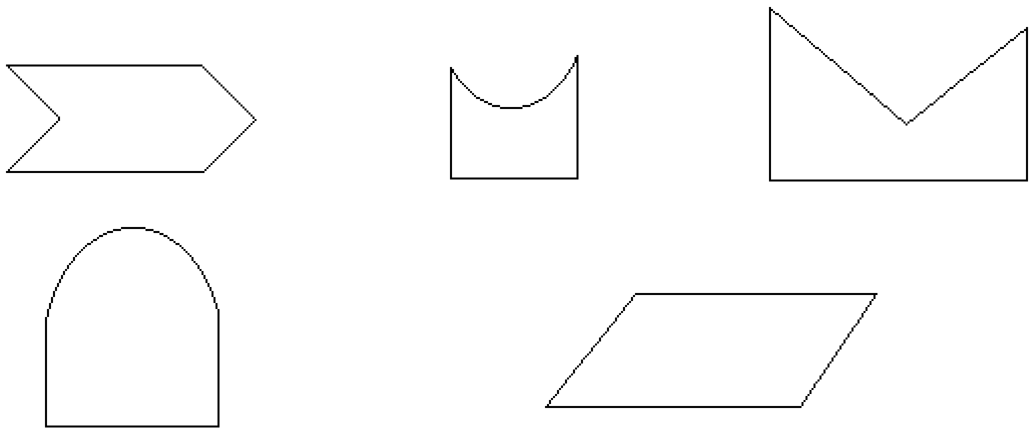
1. Quais das figuras abaixo são polígonos? Justifique.



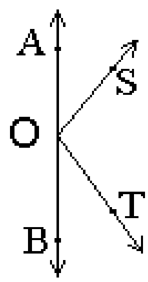
2. Dar uma maneira de determinar o número de diagonais de um polígono. Não vale aquela fórmula decorada. Diga em quantos triângulos as diagonais partindo de um vértice divide o polígono convexo.



3. Quais são polígonos convexos? Justifique.



4. É dada a figura a seguir com vértice O. O ângulo $S\hat{O}T$ é reto e $mT\hat{O}B = 50^o$.

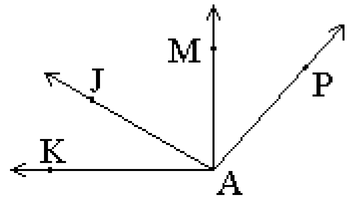


a) Dê um par de semi-retas perpendiculares

b) Dê um par de ângulos complementares

c) Dê um par de ângulos suplementares

5. Se $P\hat{A}M$ e $M\hat{A}J$ são complementares e $K\hat{A}J$ e $M\hat{A}J$ são complementares, por que $K\hat{A}J \cong P\hat{A}M$ (congruentes)?



6. Se duas retas distintas se interceptam, quantos pares de ângulos opostos pelo vértice são formados?

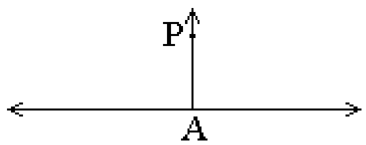
b) Se um deles mede 62º, qual a medida dos outros?

4. RETAS PERPENDICULARES

É claro que o suplemento de um ângulo reto é também um ângulo reto. Quando duas retas distintas se interceptam, se um dos quatro ângulos formados por elas for reto, então todos os outros também o serão. Neste caso, diremos que as retas são perpendiculares.

<u>Teorema 2:</u> Por qualquer ponto de uma reta passa uma única perpendicular a esta reta.

<u>Demonstração</u>: Dada uma reta m e um ponto A sobre ela, as duas semi-retas determinadas por A formam um ângulo raso. Considere um dos semi-planos determinados por m. De acordo com AM5 existe exatamente uma semi-reta $\overrightarrow{AP}$, tal que m$P\hat{A}B$ = 90º. Portanto, $\overleftrightarrow{AP}$ é perpendicular à reta m.



Isto conclui a demonstração.

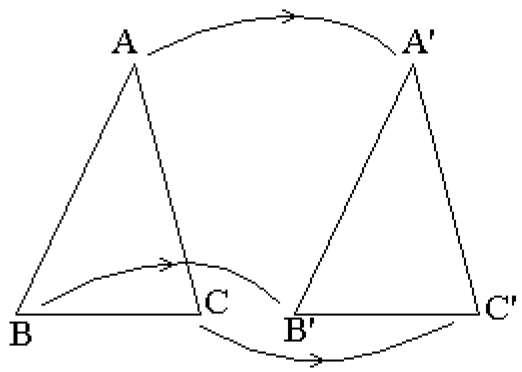
5. CONGRUÊNCIA

<u>Definição:</u> Diremos que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes se eles têm a mesma medida. Dois ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{E}F$ são congruentes se eles têm a mesma medida.

<u>Proposição 3</u>: A relação de congruência é uma relação de equivalência. Isto é, é reflexiva, simétrica e transitiva.

<u>Definição</u>: Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Mais precisamente, os triângulos ΔABC e ΔA'B'C' são congruentes se, e somente se, existe uma bijeção entre seus vértices, digamos: $Q:\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$



de modo que:

$AB = A'B'$ $\qquad$ $m B\hat{A}C = m B'\hat{A}'C'$

$BC = B'C'$ $\qquad$ $m A\hat{C}B = m A'\hat{C}'B'$

$CA = C'A'$ $\qquad$ $m C\hat{B}A = m C'\hat{B}'A'$

Neste caso escrevemos $ABC \leftrightarrow A'B'C'$ para dizer que:

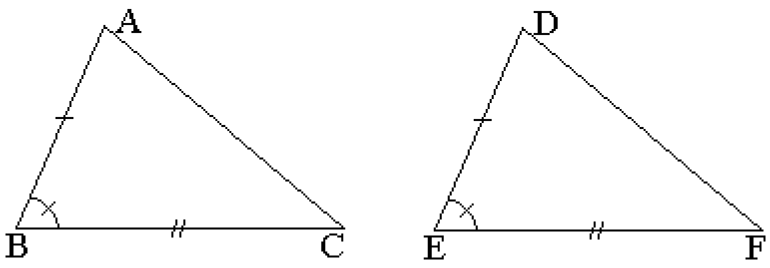
A está associado a A'

B está associado a B'

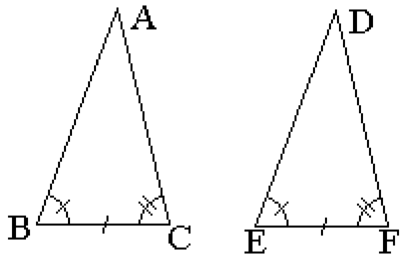
C está associado a C'

Intuitivamente, dois triângulos são congruentes se um pode ser sobreposto sobre o outro.

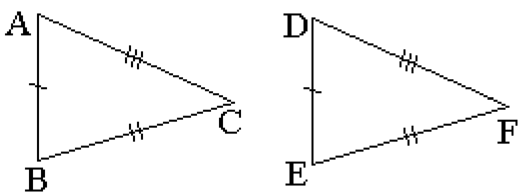
A correspondência $ABC \leftrightarrow DEF$ é chamada LAL (lado-ângulo-lado) se dois lados e o ângulo determinado por eles, do primeiro triângulo são congruentes aos elementos correspondentes do segundo triângulo.



Da mesma forma, $ABC \leftrightarrow DEF$ é chamada uma correspondência ALA (ângulo-lado-ângulo), se os dois ângulos e o lado determinado por eles no primeiro triângulo, são congruentes aos elementos correspondentes do segundo.



A correspondência LLL (lado-lado-lado) significa que lados correspondentes são congruentes.



Axiomas de Congruência

AC1 - Toda correspondência LAL é uma congruência.

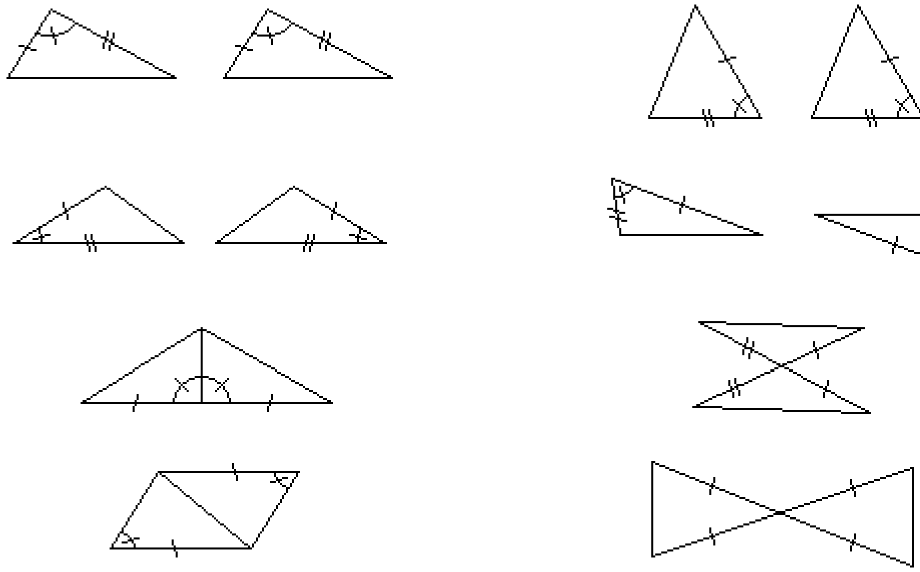
AC2 - Toda correspondência ALA é uma congruência.

AC3 - Toda correspondência LLL é uma congruência.

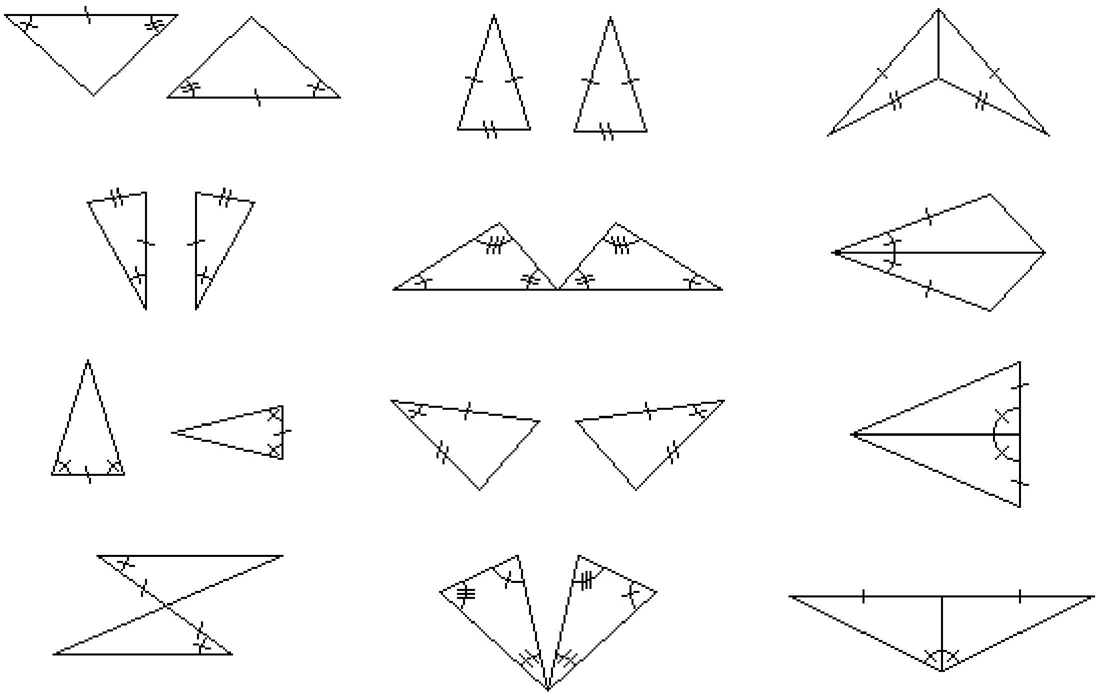
Observação: Pode-se provar que AC2 e AC3 são conseqüências de AC1.

Exemplos

1. A cada par de triângulos abaixo, quais são congruentes por LAL.

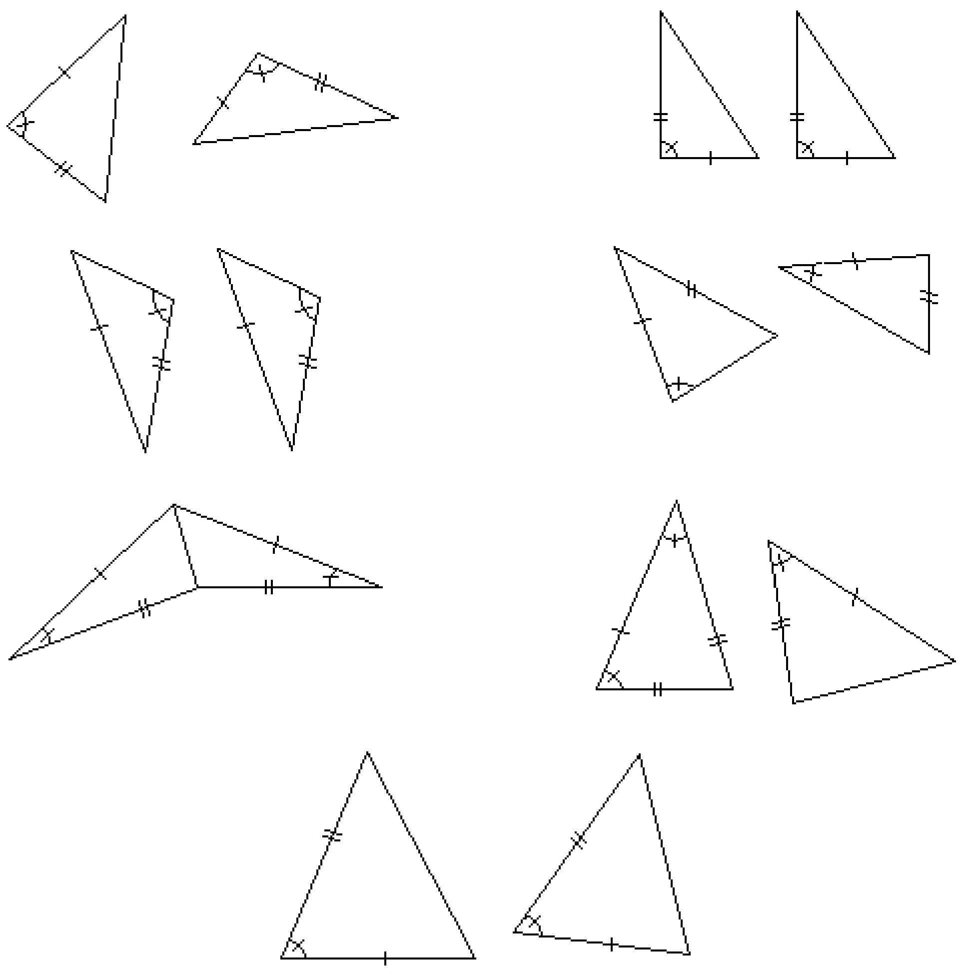


2. Indique o axioma que garante, se for o caso, que os triângulos são congruentes.

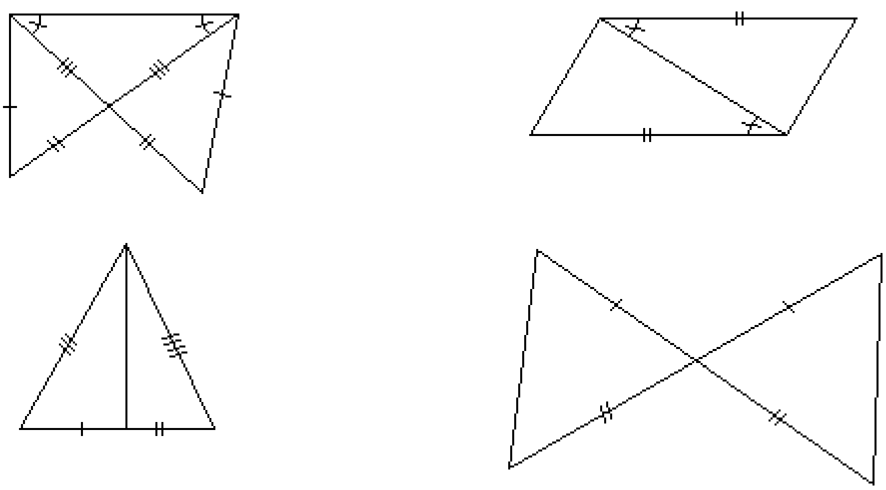


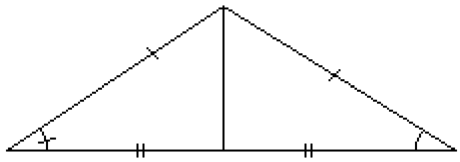
Exercícios

1. Quais pares de triângulos são congruentes por LAL?

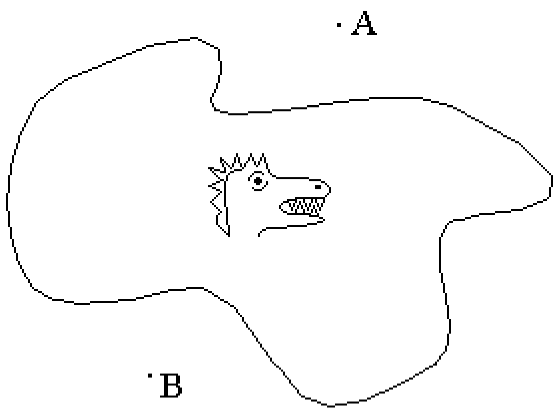


2. Quais pares de triângulos são congruentes? Justifique.

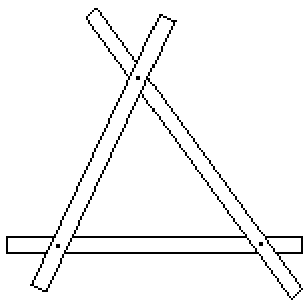




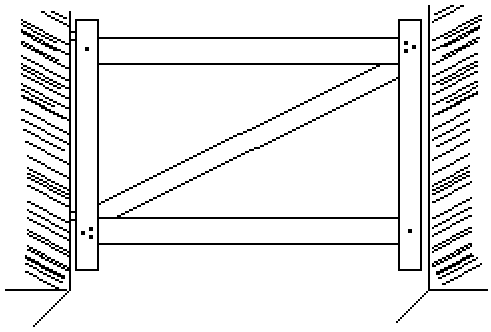
3. Suponha que você queira medir a distância entre dois pontos situados em lados opostos de um lago. O lago é habitado por um monstro. Qual é a sua saída?



4. Três pedaços de madeira são pregados, dois a dois, de modo a formar um triângulo, com somente um prego em cada vértice. Como na figura abaixo. A figura assim obtida é rígida. Porque?
   E se quatro pedaços de madeira forem pregados, o quadrilátero seria rígido?



5. Explique porque é usual reforçar um portão com uma trave na diagonal. Ver figura.

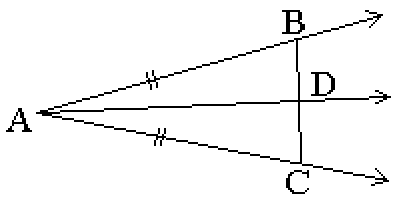


6. APLICAÇÕES DE CONGRUÊNCIA

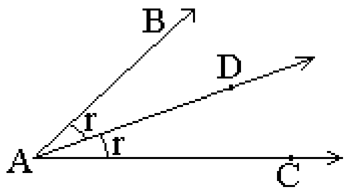
Definição: Se D está no interior de BÂC e mBÂD=mDÂC, então $\overrightarrow{AD}$ divide BÂC ao meio e $\overrightarrow{AD}$ é chamada a bissetriz do ângulo BÂC.

Teorema 4 - Todo ângulo possui exatamente uma bissetriz.

Demonstração: Na figura, escolha B e C, sobre os lados do ângulo Â, de modo que BA=CA. Seja D o ponto médio de $\overline{BC}$. Então $ADB \leftrightarrow ADC$ é uma correspondência LLL. Pelo axioma LLL, temos que $\Delta ADB \cong \Delta ADC$. Portanto, BÂD $\cong$ CÂD, porque estes são ângulos correspondentes. Assim Â tem uma bissetriz.



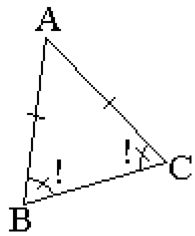
Suponha agora que $\overrightarrow{AD}$ divida BÂC ao meio como é visto abaixo. Se r = mDÂC, então r = mDÂB. Portanto, r = $\frac{1}{2}$mBÂC. Mas sabemos também que D está no mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$, pelo axioma da construção de ângulos existe uma única semi-reta $\overrightarrow{AD}$ que dá um ângulo com a medida desejada. Logo, a bissetriz é única.



Teorema do triângulo isósceles 5

Se dois lados de um triângulo são congruentes, então os ângulos opostos a estes lados são congruentes.

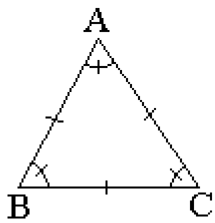
Demonstração: Considere o triângulo ΔABC com AB=AC. Provaremos que $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são congruentes. Considere a correspondência $ABC \leftrightarrow ACB$ entre ΔABC e si mesmo. Por LAL, segue que ΔABC ≅ ΔACB. Portanto, $A\hat{B}C \cong A\hat{C}B$.



Isto conclui a demonstração.

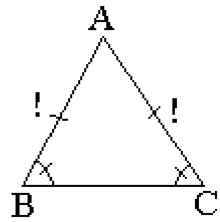
Corolário 6 - Todo triângulo equilátero é eqüiângulo (com os 3 ângulos congruentes).

Demonstração: Imediata do teorema anterior.



Teorema 7 - Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então os lados opostos a estes ângulos são congruentes.

Demonstração: Dado o ΔABC, se $A\hat{B}C \cong A\hat{C}B$, provaremos que AB = AC. Considere a correspondência $ABC \leftrightarrow ACB$, é uma correspondência ALA. Portanto, $\Delta ABC \cong \Delta ACB$ e AB = AC.

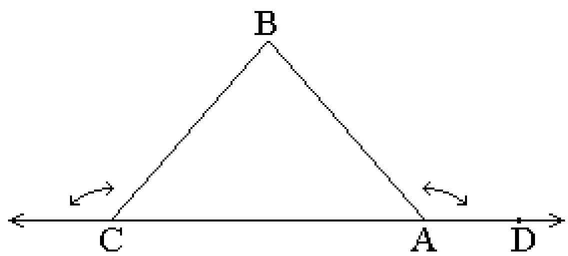


Isto conclui a demonstração.

Corolário 8 - Todo triângulo equiângulo é equilátero.

Demonstração: Imediata do teorema acima.

Definição - No triângulo ΔABC, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ são chamados internos. Os suplementares destes ângulos são chamados ângulos externos do triângulo. Na figura $B\hat{A}D$, é um ângulo externo.

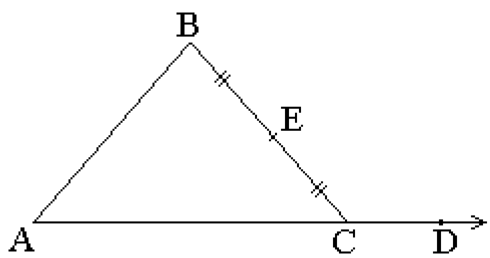


Apresente mais dois ângulos externos:

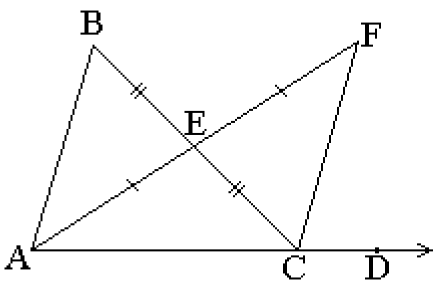
Teorema do ângulo externo 9

Todo ângulo externo é maior que qualquer um de seus ângulos internos não adjacentes.

Demonstração: Dado o ΔABC, com C entre A e D, provaremos que $mB\hat{C}D > mA\hat{B}C$. Veja as figuras.



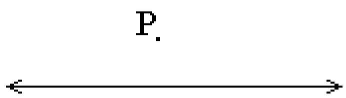
Afirmações	Justificativa
1. Seja E o ponto médio de $\overline{BC}$	Existe ponto médio
2. Seja F um ponto na semi-reta oposta a $\overline{EA}$ tal que EF=EA	....
3. $m B\hat{E}A = m C\hat{E}F$	ângulos opostos pelo vértice
4. $\Delta BEA \cong \Delta CEF$	....
5. $m A\hat{B}E = m E\hat{C}F$	....
6. $m B\hat{C}D = m E\hat{C}F + m F\hat{C}D$	adição de ângulos
7. $m B\hat{C}D = m A\hat{B}E + m F\hat{C}D$	afirmações 5 e 6
8. $m B\hat{C}D > m A\hat{B}E$	soma de números positivos
9. $m B\hat{C}D > m A\hat{B}C$	....



Isto conclui a demonstração.

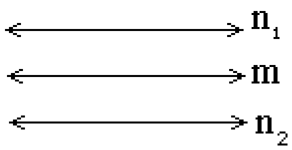
7. PARALELISMO

AP1 (Axioma das paralelas) - Por um ponto P fora de uma reta m passa uma única reta paralela a m.

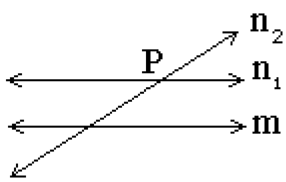


A existência de retas paralelas pode ser demonstrada por meio dos axiomas e resultados anteriores, mas a unicidade só pode ser garantida pelo axioma das paralelas. Este é o mais polêmico dos axiomas da geometria, responsável por descobertas importantes na área da geometria.

Teorema 10 - Se a reta m é paralela às reta n_1 e n_2, então n_1 e n_2 são paralelas ou coincidentes

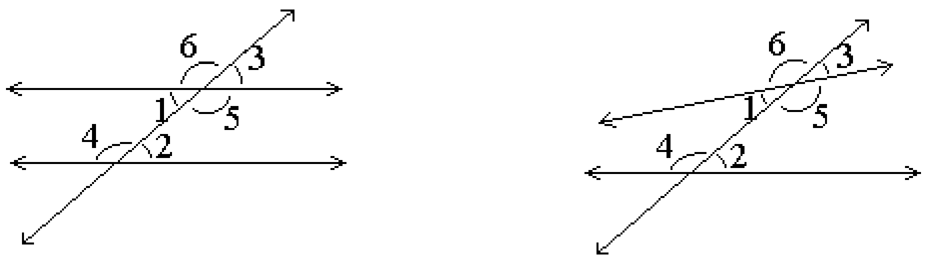


Demonstração: Suponha que n_1 e n_2 são não coincidentes e paralelas a m. Vamos provar que são paralelas entre si. Se n_1 e n_2 não fossem paralelas entre si, elas se interceptariam num ponto P. Mas n_1 e n_2 seriam paralelas a m e passando por P. Isto contradiz o axioma das paralelas. Logo, n_1 e n_2 são paralelas.



Isto conclui a demonstração.

Duas retas no plano são paralelas se elas não se interceptam. Esta definição de retas paralelas não é tão simples de usar como aparenta. Desde que retas são infinitas em comprimento, como poderemos provar que duas retas não se encontram num ponto P do plano muito distante? Uma maneira simples de responder a esta pergunta é através da comparação de dois ângulos que elas formam com uma outra reta que as intercepte.



Nas figuras acima, os ângulos:

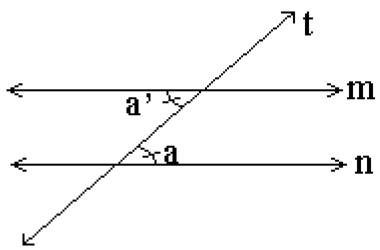
$\hat{1}$ e $\hat{2}$ são alternos-internos

$\hat{4}$ e $\hat{5}$ são alternos-internos

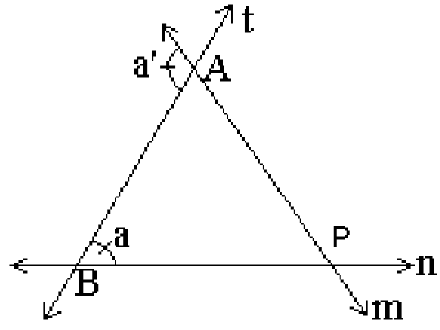
$\hat{2}$ e $\hat{3}$ são ângulos correspondentes

$\hat{4}$ e $\hat{6}$ são ângulos correspondentes

<u>Teorema 11</u> - Se as retas m e n são cortadas por uma transversal t, formando um par de ângulos alternos-internos congruentes, então as retas m e n são paralelas.

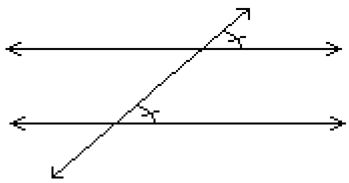


<u>Demonstração</u>: Suponha, por absurdo, que m e n se interceptam num ponto P. Mostraremos que isto nos levará a uma contradição. Estamos supondo a seguinte situação.



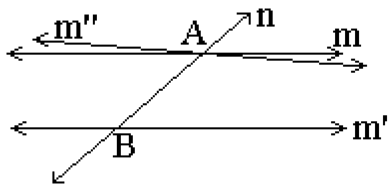
Seja S um ponto na semi-reta $\overrightarrow{PA}$, no lado de t oposto a P. Então SÂB é um ângulo externo do triângulo ΔABP. Pelo teorema do ângulo externo, mâ’ > mâ. Absurdo, pois por hipótese â’ ≅ â. Logo, m e n são paralelas. Isto conclui a demonstração.

Prove você agora que se há um par de ângulos correspondentes congruentes, as retas são paralelas.



<u>Teorema 12</u> - Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes.

<u>Demonstração</u> - Sejam m e m’ duas retas paralelas e seja n uma reta que corta m e m’ nos pontos A e B. Considere m” a reta passando por A e formando com a transversal quatro ângulos congruentes aos ângulos correspondentes formados pela reta m’ com a mesma transversal.



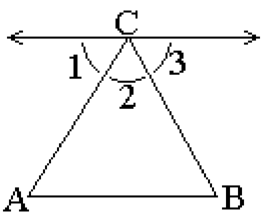
Logo, m’ e m” são paralelas. Como m||m’ e m’||m” segue que m||m” ou são coincidentes, mas m e m” se interceptam em A. Logo, m e m” são coincidentes.

Portanto, m forma ângulos com a reta n congruentes aos correspondentes formados por m’ e com a reta n. Isto conclui a demonstração.

<u>Teorema 13</u> - A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º

<u>Demonstração</u>:

Seja o triângulo ΔABC. Pelo vértice C trace uma paralela ao lado $\overline{AB}$. Numere os ângulos formados com o vértice C.



Temos que $m\left(\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}\right)=180^{o}$

Como $\overleftrightarrow{AC}$ é transversal às duas paralelas, segue que $\hat{1}\cong\hat{A}$. Como $\overleftrightarrow{BC}$ é transversal, então $\hat{3}\cong\hat{B}$. Logo,

$$m\left(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}\right)=180^{o}.$$

Isto conclui a demonstração.

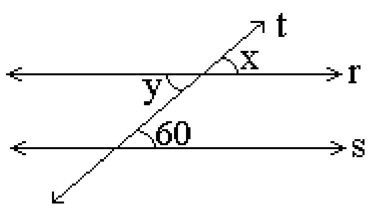
Como atividade, faça uma página usando o Cabri ou usando o Cinderella para ilustrar este resultado. Construa um triângulo qualquer e meça os seus ângulos internos. Verifique esta soma é 180º. Faça alterações no triângulo modificando a sua forma e observe que a soma permanece igual a 180º.

Uma informação: existem geometrias "não euclidianas", em que esta soma pode ser maior ou menor de 180º.

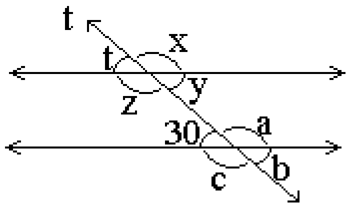
<u>Exercícios</u>

1. Sendo r e s paralelas, calcule os ângulos indicados.

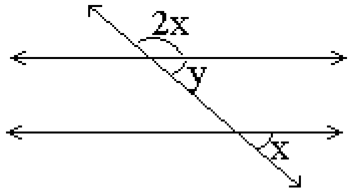
a)



b)

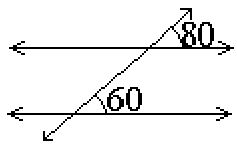


c)

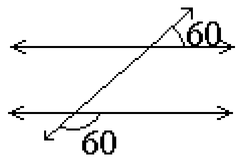


2. As retas abaixo são paralelas? Justifique.

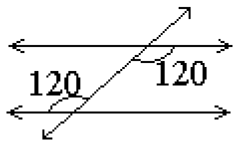
a)



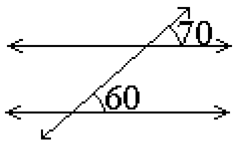
b)



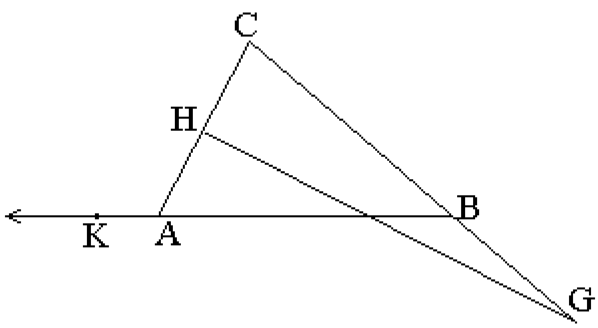
c)



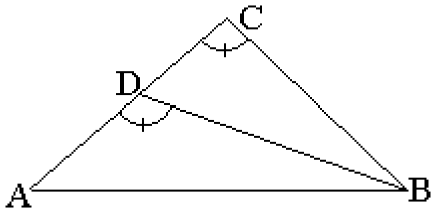
d)



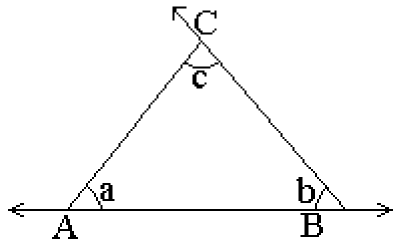
3. Mostre que $mC\hat{A}K > mH\hat{G}B$.



4. Explique porque a figura a seguir indica uma situação impossível.

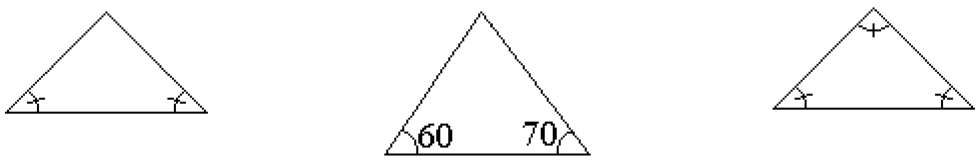


5. Prove que a soma das medidas de dois ângulos quaisquer de um triângulo é menor que 180º.

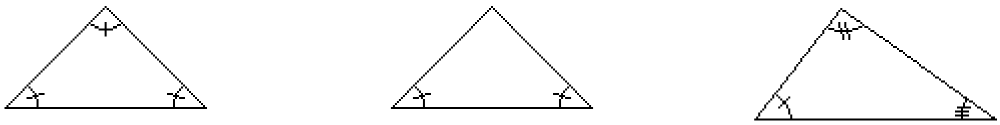


6. Prove que em qualquer triângulo, um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

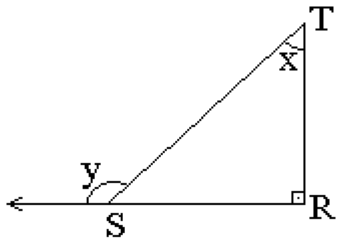
7. O triângulo ΔABC abaixo é isósceles?

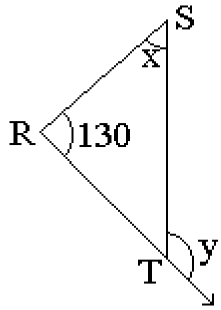


8. Os triângulos ΔABC, abaixo são isósceles? Quais são equiláteros?

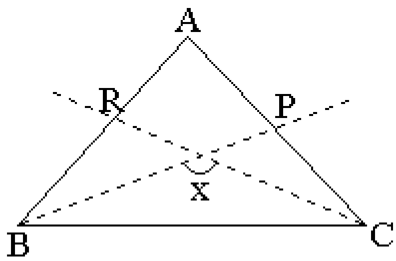


9. Calcule x e y sabendo que RS = RT

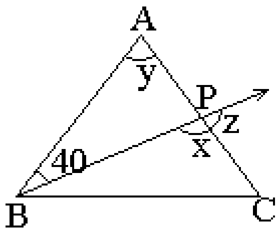




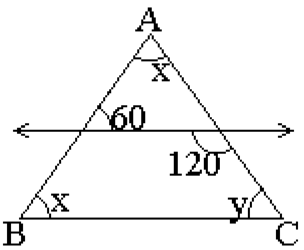
10. Uma bissetriz de um triângulo é uma semi-reta que divide um ângulo em dois ângulos congruentes. No triângulo isósceles ΔABC com AB = BC, um dos ângulos da base mede 40º. Determine o ângulo formado pelas bissetrizes $\overrightarrow{BP}$ e $\overrightarrow{CR}$.

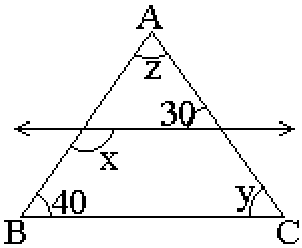


11. O triângulo ΔABC é isósceles de base $\overline{BC}$ e $\overrightarrow{BP}$ é bissetriz. Calcule x, y e z.

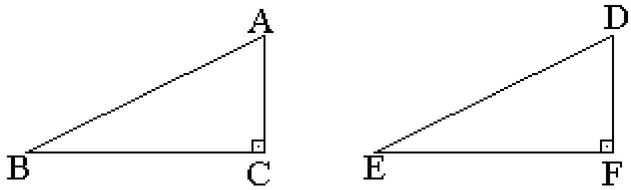


12. A reta t é paralela à base dos triângulos, calcule x, y e z.





13. Sejam os triângulos ΔABC e ΔDEF abaixo. Prove que:

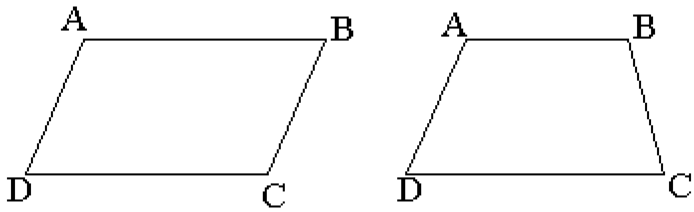


a) Se BC = EF e $\hat{A} \cong \hat{D}$, então os triângulos são congruentes

b) Se AB = DE e $\hat{B} \cong \hat{E}$, então os triângulos são congruentes

8. QUADRILÁTEROS

Trataremos aqui apenas de quadriláteros convexos. Dois lados de um quadrilátero são opostos se não se interceptam. Dois lados são consecutivos se têm em comum uma extremidade. Dois ângulos são consecutivos se têm um lado do quadrilátero comum. Uma diagonal de um quadrilátero é um segmento ligando dois vértices não consecutivos.



Os quadriláteros com forma particular, formas especiais, são:

Trapézio - quadrilátero com dois lados paralelos.

Paralelogramo - quadrilátero com **dois pares** de lados paralelos.

Losango - paralelogramo cujos lados são todos congruentes.

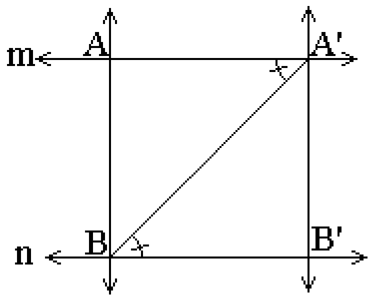
Retângulo - paralelogramo cujos ângulos são todos retos.

Quadrado - Retângulo cujos lados são todos congruentes.

Note que se m e n são retas paralelas, então todos os pontos de m estão à mesma distância da reta n.

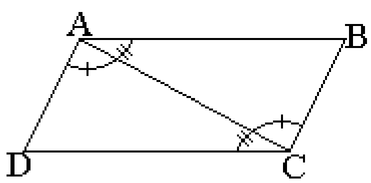
Teorema 14 – Sejam m e n retas paralelas. Então todos os pontos de m estão à mesma distância da reta n.

Demonstração: Para provar esta afirmação, sejam m e n retas paralelas. Sobre m tome dois pontos A e A', e deles baixe perpendiculares à reta n. Sejam B e B' os pés das perpendiculares. Devemos provar que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. Considere a diagonal $\overline{A'B'}$.



Observemos que $\mathbf{A\hat{A}'B \cong A'\hat{B}B'}$ e que A'ÂB ≅ 90º. Portanto, ΔAA'B e ΔBB'A' são triângulos retângulos com ângulos agudos congruentes e hipotenusa comum. Logo, ΔAA'B' ≅ ΔBB'A' e então $\overline{\mathbf{AB}} \cong \overline{\mathbf{A'B'}}$.
Isto conclui a demonstração.

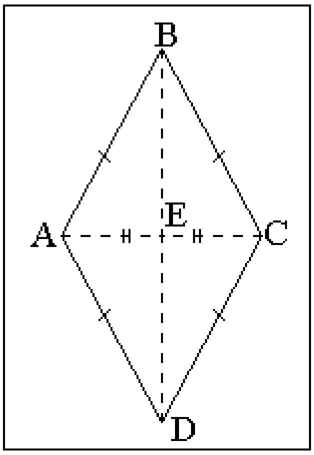
Teorema 15 - Num paralelogramo lados e ângulos opostos são congruentes.
Demonstração: Dado o paralelogramo □ABCD, como $\overline{AD} // \overline{BC}$ e $\overline{AB} // \overline{DC}$ e $\overline{AC}$ é transversal.



segue que: $B\hat{A}C \cong A\hat{C}D$

$A\hat{C}B \cong C\hat{A}D$

Por ALA, os triângulos ΔABC e ΔCDA são congruentes. Portanto, $A\hat{B}C \cong C\hat{D}A$ e $\overline{AB} \cong \overline{DC}$.



Isto conclui a demonstração.

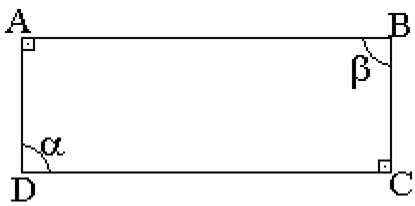
Teorema 16 - As diagonais de um paralelogramo se dividem ao meio.

Demonstração - Exercício. Use ALA e LAL.

Desafio: Fazer uma pesquisa, para mostrar que as diagonais se cruzam.

Teorema 17 - Se um paralelogramo tem um ângulo reto todos os demais são retos.

Demonstração - A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º (Por quê?). Como ângulos opostos são congruentes, temos que dois medem 90º e que os outros dois medem juntos 180º. Logo, cada um deles mede 90º.



Isto conclui a demonstração.

Teorema 18 - Num losango as diagonais são perpendiculares entre si.

Demonstração - Basta provar que $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ são perpendiculares. Veja a figura.

Sabe-se que as diagonais de um paralelogramo se dividem ao meio. Logo, na figura, AE=EC e BE=ED. Considere os triângulos ΔABE e ΔCBE. Por

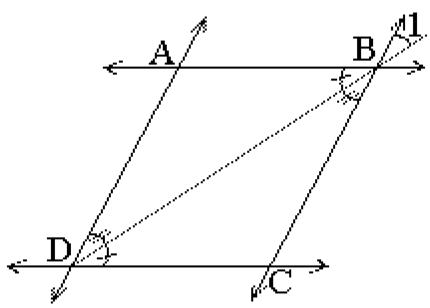
LLL, temos que eles são congruentes. Portanto, $B\hat{E}A \cong B\hat{E}C$. Como $2mB\hat{E}C=180^o$, segue que $mB\hat{E}C=90^o$ e as diagonais são perpendiculares. Isto conclui a demonstração.

<u>Teorema 19</u> - Se dois lados de um quadrilátero são paralelos e congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.

<u>Demonstração</u> - Considere o quadrilátero $\square ABCD$ com $\overline{AB}//\overline{CD}$ e AB=CD.

Provaremos que $\overline{AD}//\overline{BC}$.

Veja a figura.

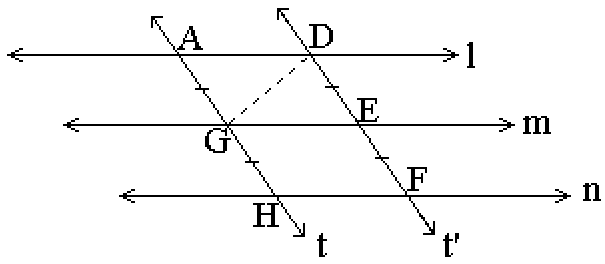


como $\overline{AB}//\overline{CD}$ temos que $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}C$ são congruentes. Por LAL, os triângulos ΔABD e ΔCDB são congruentes. Portanto, $D\hat{B}C$ e $B\hat{D}A$ são congruentes. Além disso, $\hat{1} \cong D\hat{B}C$. Portanto, $A\hat{D}B \cong \hat{1}$, isto significa que $\overline{AD}//\overline{BC}$. Isto conclui a demonstração.

9. TRANSVERSAIS A VÁRIAS PARALELAS

<u>Teorema 20</u> - Se três retas paralelas determinam segmentos congruentes sobre uma transversal t, elas determinam segmentos congruentes sobre qualquer transversal t' paralela a t.

<u>Demonstração</u>: Sejam l, m e n paralelas, t e t' transversais paralelas. Veja a figura onde AG=GH. Provaremos que DE=EF.



Os quadriláteros □AGED e □GHFE são paralelogramos. Pelo Teorema 15, lados opostos são congruentes.

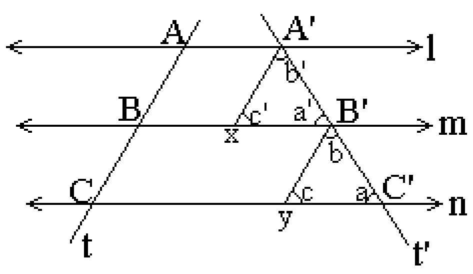
Ou ainda:

Considere a diagonal $\overline{DG}$. Como $\overline{AD}//\overline{GE}$ e $\overline{DG}$ é transversal, segue que â ≅ â' e também b e b'são congruentes. Por ALA, os triângulos ΔAGD e ΔEDG são congruentes. Logo, AD = GE e AG = DE. Analogamente, GH = EF e GE=HF. Isto conclui a demonstração.

Como atividade faça uma página no Cabri ou no Cinderella para ilustar este teorema.

<u>Teorema 21</u> - Se três retas paralelas determinam segmentos congruentes sobre uma transversal, então elas determinam segmentos congruentes sobre qualquer transversal.

<u>Demonstração</u> - l, m e n são paralelas, t e t' são duas transversais não necessariamente paralelas (o caso das transversais paralelas é o Teorema 20).



Trace $\overline{A'X}//\overline{B'y}//\overline{AC}$. Como antes, □AA'xB e □B'xyC' são paralelogramos. Logo, AA'= Bx

BB'= Cy

AB = A'x

BC = B'y

Além disso: a e a' são correspondentes;

b e b' são correspondentes.

Portanto, c e c' são congruentes e os triângulos ΔxA'B' e ΔyB'C' são congruentes.

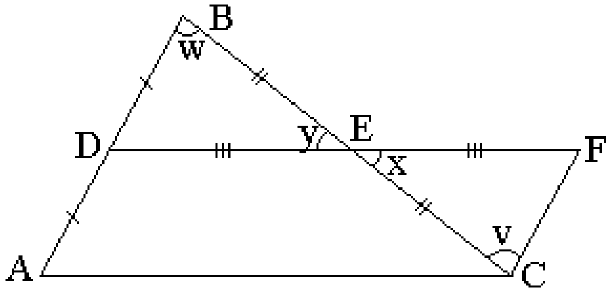
Logo, A'B' = B'C'. Isto conclui a demonstração.

De fato, vale um resultado mais geral: o Teorema 33 (Teorema de Tales), que veremos mais tarde.

Teorema 22 - O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e seu comprimento é a metade do comprimento deste lado.

Demonstração

Considere o ΔABC. Sejam D e E pontos médio de dois lados, digamos que sejam $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Provaremos que $\overline{DE}//\overline{AC}$ e $DE = \frac{1}{2}AC$.



Seja F o ponto na semi-reta $\overline{DE}$ tal que EF=DE. Continue a demonstração justificando as afirmações.

Afirmações	**Justificativas**
1. EF = DE	Escolha de F
2. EB = CE	E é ponto médio
3. $\hat{x} \cong \hat{y}$	ângulos opostos pelo vértice
4. $\Delta EFC \cong \Delta EDB$	LAL
5. $\hat{v} \cong \hat{w}$	ângulos correspondentes pela congruência
6. $\overline{AB} // \overline{CF}$	...
7. DB = FC	lados correspondentes
8. AD = DB	D ponto médio
9. AD = FC	afirmações 7 e 8
10. $\square$ADFC é paralelogramo	teorema anterior 19
11. $\overline{DE} // \overline{AC}$	definição de paralelogramo
12. $DE = \frac{1}{2} DF$	afirmação 1
13. $DE = \frac{1}{2} AC$	...

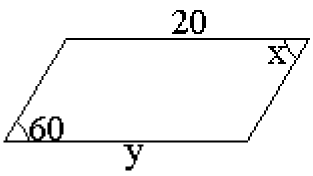
Isto conclui a demonstração.

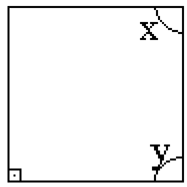
Exercícios

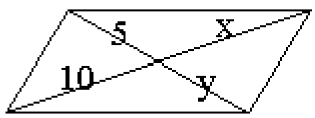
1. Recorte um triângulo qualquer. Use-o para dar uma prova “prática” de que a soma dos ângulos de um triângulo é 180º.

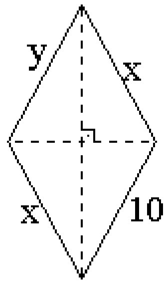
2. Use o teorema (anterior 22) para dar uma outra prova “prática” de que a soma dos ângulos de um triângulo é 180º.

3. Nos paralelogramos seguintes, determine x e y.

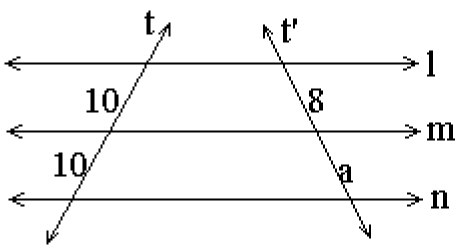


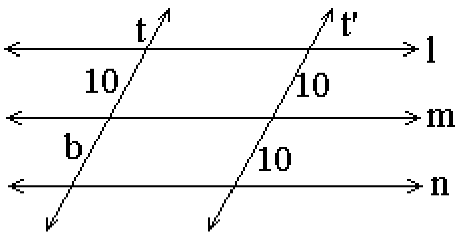


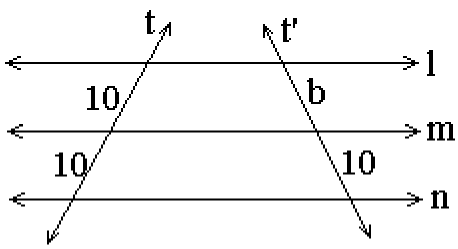




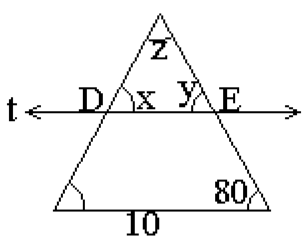
4. Dar os valores a, b e c sabendo-se que l, m e n são paralelas e t e t’ são transversais.

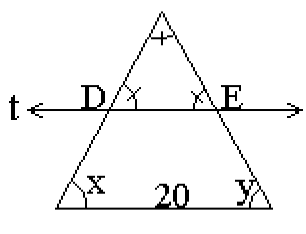


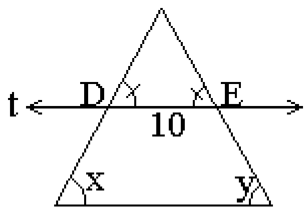




5. Nos triângulos seguintes, a reta t é paralela à base e passa pelos pontos médios dos lados. Dar as medidas de $\overline{DE}$, x, y e z.







6. Verdadeiro ou Falso?

   a) Todo paralelogramo é um trapézio.

   b) Um losango é um paralelogramo e um trapézio.

   c) Um quadrado é um retângulo.

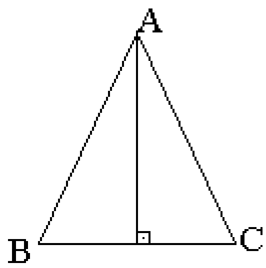
   d) Um quadrado é um losango.

   e) Um losango é um quadrado.

   f) Todo trapézio é um paralelogramo.

   g) Nenhum quadrado é retângulo.

7. Prove que a altura relativa à base de um triângulo, isósceles, divide-o em dois triângulos congruentes.

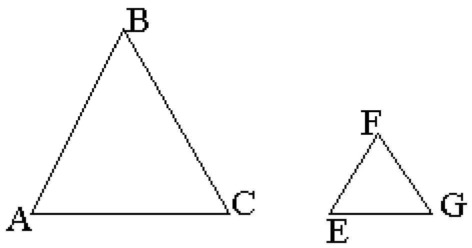


10. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma bijeção entre seus vértices de modo que: ângulos correspondentes são congruentes e lados correspondentes são proporcionais.

Se ΔABC e ΔEFG são triângulos semelhantes e $\begin{pmatrix} A & B & C \\ E & F & G \end{pmatrix}$ é a bijeção, usaremos a notação $\Delta ABC \sim \Delta EFG$ para dizer que os triângulos são semelhantes.

Dizer que $\Delta ABC \sim \Delta EFG$ significa que



$$m B\hat{A}C = m F\hat{E}G$$
$$m A\hat{B}C = m E\hat{F}G$$
$$m B\hat{C}A = m F\hat{G}E$$
$$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GE}{CA} = k > 0$$

Observe que se k=1, então os lados correspondentes são congruentes, neste caso a semelhança recai no caso de congruência. Portanto, dois triângulos congruentes são semelhantes.

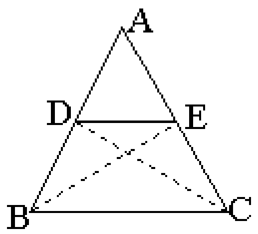
<u>Teorema Fundamental sobre proporcionalidade 23</u>

Se uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a esses lados.

<u>Demonstração</u>

No ΔABC abaixo, sejam D e E pontos de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ tais que $\overline{DE} // \overline{BC}$.

Provaremos que $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$



Nos triângulos ΔADE e ΔBDE consideremos $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$ como as bases. Então estes triângulos têm a mesma altura. Portanto,

$$(1)\quad \frac{a\Delta BDE}{a\Delta ADE} = \frac{BD}{AD}$$

Analogamente, nos ΔADE e ΔCDE consideremos $\overline{AE}$ e $\overline{CE}$ como bases. Como esses triângulos têm a mesma altura temos que

$$(2)\quad \frac{a\Delta CDE}{a\Delta ADE} = \frac{CE}{AE}$$

Mas ΔBDE e ΔCDE têm a mesma base $\overline{DE}$ e mesma altura (pois $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ são paralelas). Logo,

$$(3)\quad a\Delta BDE = a\Delta CDE.$$

Combinando (1), (2) e (3) temos

$$(4)\quad \frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$$

Adicionando 1 a ambos os membros de (4) obtemos

$$\frac{BD + AD}{AD} = \frac{CE + AE}{AE} \text{ ou } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

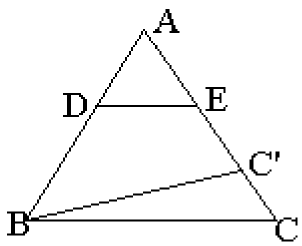
que é o que queríamos provar.

<u>Recíproco do teorema fundamental sobre proporcionalidade 24</u>

Se uma reta intercepta dois lados de um triângulo e determina segmentos proporcionais a estes dois lados, então ela é paralela ao terceiro lado.

Demonstração

Dado um triângulo ΔABC. Seja D um ponto entre A e B e seja E um ponto entre A e C.



Se $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, provaremos que $\overline{DE} // \overline{BC}$.

Seja $\overleftrightarrow{BC}$ uma paralela a $\overleftrightarrow{DE}$, interceptando $\overline{AC}$ em C'. Pelo teorema fundamental sobre proporcionalidade (23)

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE}$$

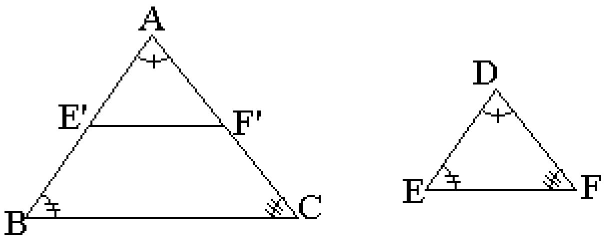
Como por hipótese $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ temos que $\frac{AC'}{AE} = \frac{AC}{AE}$. Logo AC=AC'. Portanto, $\overline{DE} // \overline{BC}$. Isto conclui a demonstração.

Teoremas fundamentais sobre semelhança

Teorema AAA sobre semelhança 25

Dada uma correspondência φ: $\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{pmatrix}$ entre dois triângulos ΔABC e ΔDEF, se $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$, então os triângulos são semelhantes.

Demonstração:



Por hipótese os ângulos correspondentes são congruentes. Precisamos provar que os lados correspondentes são proporcionais. Isto é, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$. Vamos provar a primeira igualdade.

Sejam E' e F' pontos de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ tais que AE'=DE e AF'=DF.

Por LAL, ΔAE'F'≅ΔDEF. Portanto, $\hat{E}' \cong \hat{B}$ e $\hat{F}' \cong \hat{C}$

Vamos considerar dois casos:

1º caso: E'=B

2º caso: E'≠B

Para o 1º caso: Se E'=B, então ΔAE'F' e ΔABC são o mesmo triângulo por ALA. Neste caso, ΔAE'F'≅ΔDEF e $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = 1$.

Para o 2º caso: Se E'≠B, então $\overleftrightarrow{E'F'}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, porque possuem ângulos correspondentes congruentes. Pelo teorema fundamental sobre proporcionalidade, temos

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF},$$

como queríamos demonstrar.

A outra igualdade demonstra-se de maneira análoga.

Já sabemos que se dois triângulos têm 2 pares de ângulos congruentes, então o 3º par também o é. Podemos então reescrever o teorema acima:

Corolário 26 **AA sobre semelhança**

Dada uma correspondência entre dois triângulos, se dois pares de ângulos são congruentes, então a correspondência é uma semelhança.

Teorema 27 - A relação de "semelhança" é uma relação de equivalência.

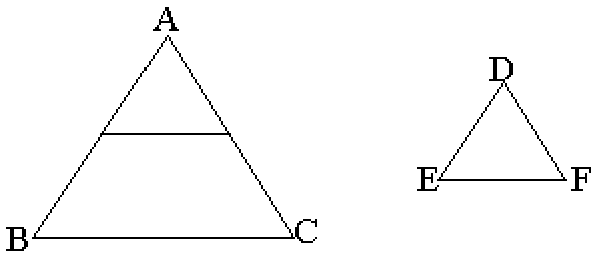
Desafio: Pesquise o que significa uma relação de equivalência.

Teorema 28 **LAL sobre semelhança**

Dada uma correspondência entre dois triângulos, se dois pares de lados correspondentes são proporcionais e os ângulos que eles determinam, congruentes, então a correspondência é uma semelhança.

Demonstração - São dados ΔABC e ΔDEF e $\varphi: \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{pmatrix}$

Se $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ e $\hat{A} \cong \hat{D}$ então provaremos que ΔABC~ΔDEF



Sejam E', F' pontos sobre $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ tais que AE'=DE e AF'=DF.

Por LAL, temos que ΔAE'F'≅ΔDEF. Portanto,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$$

Pelo teorema recíproco do teorema fundamental sobre proporcionalidade, temos:

$$\overline{E'F'} // \overline{BC}$$

Portanto, $\hat{B} \cong A\hat{E}'F'$, são ângulos correspondentes formados pela transversal $\overleftrightarrow{AB}$ e as paralelas $\overleftrightarrow{E'F'}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

Como Â≅Â e $\hat{B} \cong AE'F'$, segue de AA que

$$\Delta ABC \sim \Delta AE'F'$$

mas $\Delta AE'F' \cong \Delta DEF$. Logo,

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF.$$

Isto conclui a demonstração.

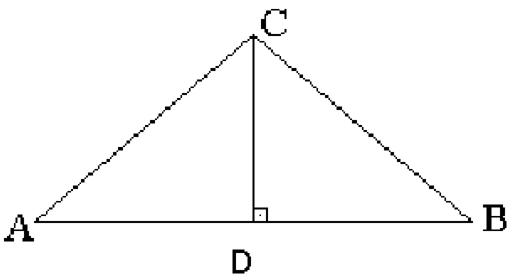
Teorema 29 **LLL sobre semelhança**

Dada uma correspondência entre dois triângulos, se os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência é uma semelhança.

Demonstração - Exercício.

11. SEMELHANÇA EM TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Teorema 30 Em qualquer triângulo retângulo, a altura em relação à hipotenusa separa o triângulo em dois triângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo original.



Demonstração

Seja ΔABC retângulo em C e $\overline{CD}$ a altura em relação a $\overline{AB}$. Então $\Delta ACD \sim \Delta ABC \sim \Delta CBD$. Observemos que $\hat{C} \cong \hat{D}$ pois são ambos retos e $\hat{A} \cong \hat{A}$. Portanto os ΔACD e ΔABC têm dois ângulos congruentes. Pelo corolário AA, $\Delta ACD \sim \Delta ABC$. Analogamente, prova-se que $\Delta ABC \sim \Delta BCD$.

Isto conclui a demonstração.

Teorema 31 - Dados um triângulo retângulo e a sua altura em relação à hipotenusa, temos:

a) a altura é a média geométrica dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa.

b) cada um dos catetos é a média geométrica da hipotenusa e do segmento da hipotenusa adjacente ao cateto.

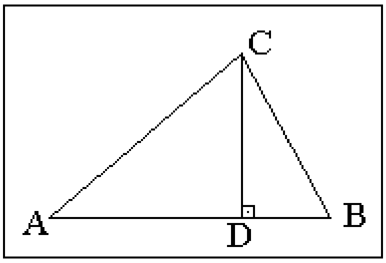
Demonstração

Seja ΔABC um triângulo retângulo com ângulo reto em C e $\overline{CD}$ a altura em relação à hipotenusa $\overline{AB}$. Provaremos que:

(1) $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$

(2) $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$

(3) $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA}$



Temos que $\Delta ACD \sim \Delta CBD \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD = \sqrt{AD.DB}$

$$\Delta ACD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = \sqrt{AD.AB}$$

$$\Delta CBD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow BC = \sqrt{BD.BA}$$

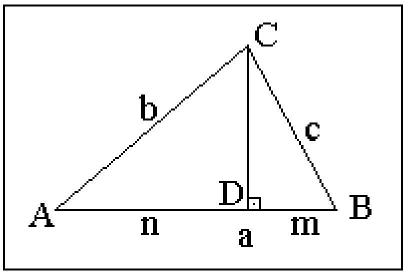
Isto conclui a demonstração.

Teorema de Pitágoras 32 - Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Demonstração

A demonstração é uma conseqüência da semelhança de triângulos. Do teorema anterior, temos:

$$1)\ \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{n}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = na$$



$$2)\ \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{m}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 = ma$$

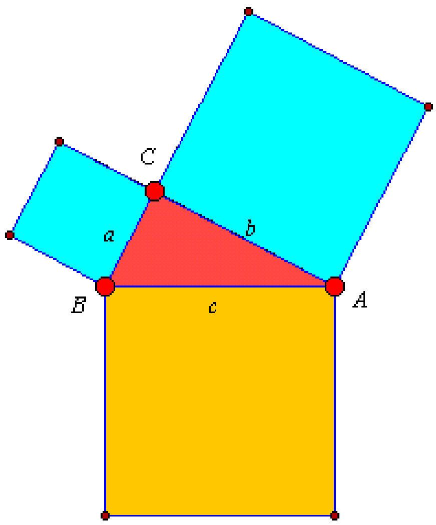
$$(1) + (2) \Rightarrow na + ma = b^2 + c^2$$

$$a\,(n + m) = b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2\ .$$

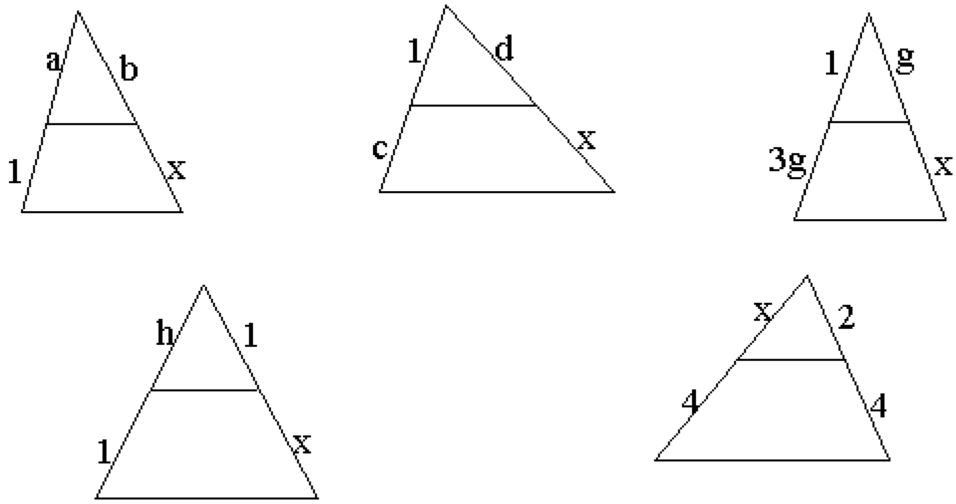
Assim terminamos a demonstração.

Podemos ilustrar o Teorema de Pitágoras da seguinte forma: a soma das áreas dos dois quadrados menores é igual a área do quadrado maior.

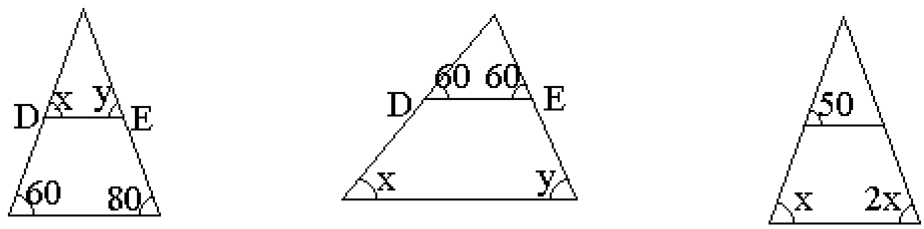


Exercícios

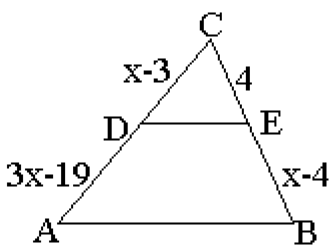
1) Em cada triângulo abaixo é desenhado um segmento paralelo à base e são indicados os comprimentos de alguns lados. Escreva x em função das outras letras.



2) Em cada triângulo abaixo, o segmento $\overline{DE}$ determina segmentos proporcionais nos lados. Determine os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

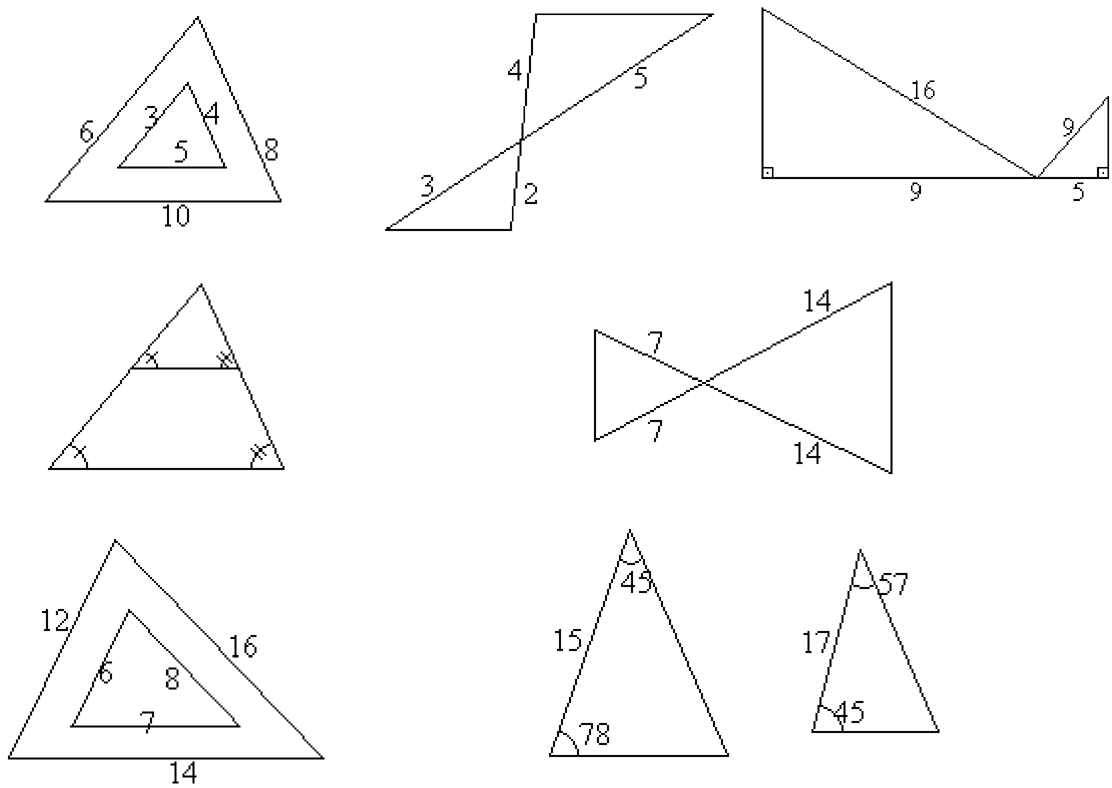


3) Determine todos os valores de x que farão $\overline{DE} // \overline{AB}$.

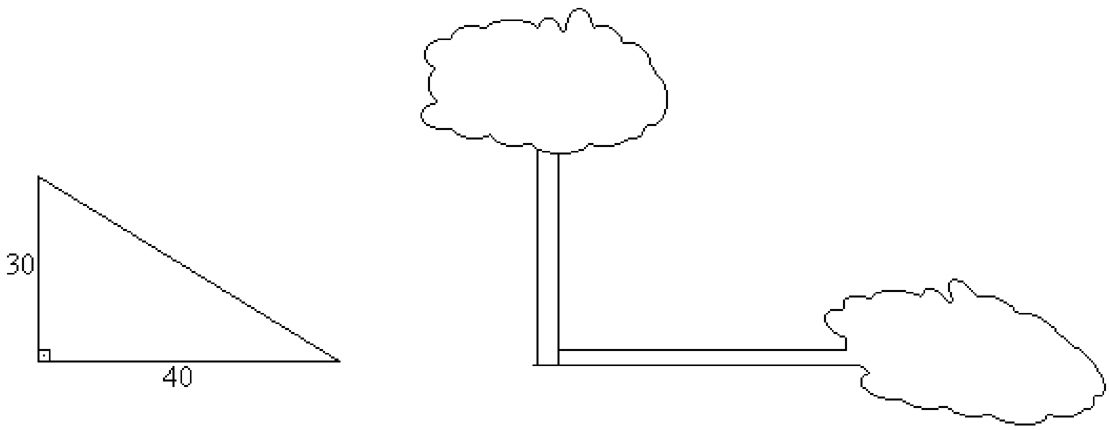


3') Prove: se um par de triângulos retângulos têm um par de catetos e hipotenusa congruentes, então são congruentes.

4) Para cada um dos triângulos indique se são semelhantes. Justifique.



5) Suponha que uma vara de 30cm projete uma sombra de 40cm. Ao mesmo tempo, uma árvore projeta uma sombra de 120cm. Qual é a altura da árvore?



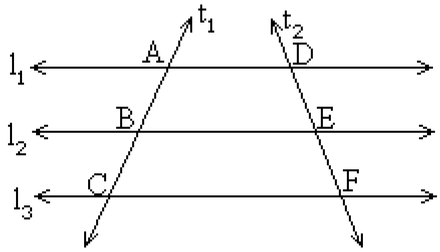
Crie outras situações onde é possível usar semelhança de triângulos.

6) Como você descobriria a distância a que se encontra um objeto inatingível, do outro lado de um rio?

12. TEOREMA DE TALES

<u>Teorema de Tales 33</u> - Se as transversais t_1 e t_2 cortam as paralelas l_1, l_2 e l_3 em A, B, C e D, E, F respectivamente, então $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

<u>Sugestão</u>: Trace a diagonal $\overline{DC}$.



13. REGIÕES POLIGONAIS E SUAS ÁREAS

Uma região poligonal é uma figura plana formada pela justaposição de um número finito de regiões triangulares, de tal modo, que se duas se interceptam, a interseção é um ponto ou um segmento.

A idéia de área de regiões poligonais é introduzida na geometria através dos axiomas abaixo.

<u>AA1</u> (axioma da área) - A toda região poligonal corresponde um número real maior do que zero. A este número chamamos área da região.

<u>AA2</u> (adição de áreas) - Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais sem pontos interiores em comum, então a sua área é a soma das áreas daquelas regiões.

<u>AA3</u> (axioma da congruência) - Triângulos congruentes têm a mesma área.

<u>AA4</u> A área de um retângulo de base *b* e altura *h* é *b.h*.

<u>Teorema 34</u> - A área do quadrado de lado l é l^2.

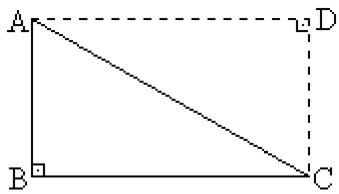
<u>Demonstração</u> - Basta notar que todo quadrado é um retângulo de base e altura congruentes.

<u>Teorema 35</u> - A área de um triângulo retângulo é o semi-produto de seus catetos.

<u>Demonstração</u> - Dado o ΔABC retângulo, seja D um ponto do plano de modo que ABCD seja um retângulo. É fácil ver que ΔABC e ΔADC são congruentes. Logo, $a\Delta ABC + a\Delta ADC = ab$

$$2a\Delta ABC = ab$$

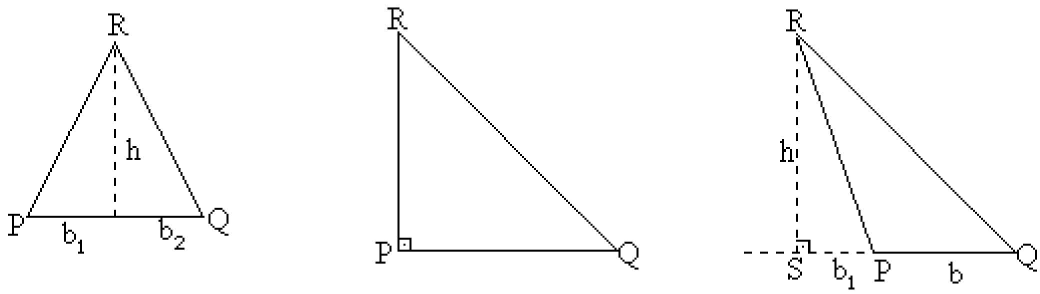
$$a\Delta ABC = \tfrac{1}{2}ab$$



Que é o que queríamos provar.

<u>Teorema 36</u> - A área de um triângulo é o semi-produto de qualquer base pela altura correspondente.

<u>Demonstração</u> - Há três casos a considerar:



No 3º caso, se $a\Delta RPQ = A$ temos que

$$\tfrac{1}{2}b_1h + A = \tfrac{1}{2}h(b_1 + b)$$

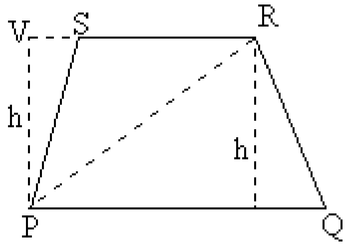
Logo, $A = \tfrac{1}{2}hb$.

Os dois primeiros casos são mais fáceis.

Isto termina a prova.

Teorema 37 **(Área de um trapézio)**

Pela figura temos:



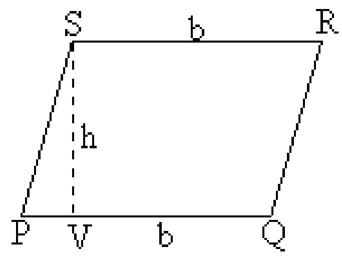
$$A = \tfrac{1}{2}b_1h + \tfrac{1}{2}b_2h$$

$$A = \tfrac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

Isto prova a igualdade.

Teorema 38 **(Área de um paralelogramo)**

Observe que o paralelogramo é um trapézio.



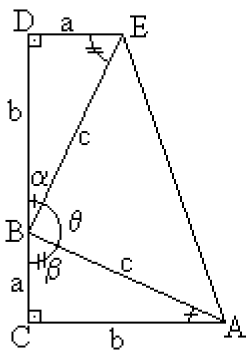
Logo,

$$A = \tfrac{1}{2}h(b + b)$$

$$A = bh$$

Teorema 39 (Pitágoras) - Num triângulo retângulo de hipotenusa c e catetos a e b, vale a relação $a^2 + b^2 = c^2$.

A demonstração dada a seguir é devida ao General James A. Garfield; ela apareceu por volta de 1875.



Considere o ΔABC, retângulo em C. Construa o □ACDE como indicado na figura. Os ΔBDE e ΔACB são congruentes. Logo,

$$D\hat{B}E \cong C\hat{A}B$$

$$C\hat{B}A \cong D\hat{E}B$$

Como $\alpha + \beta + \theta = 180^o$ e $\alpha + \beta = 90^o$ segue que $\theta = 90^o$. Portanto,

$$a\square DECA=\tfrac{1}{2}(a+b)(a+b) = \tfrac{1}{2}(a+b)^2$$

mas por outro lado,

$$a\square DECA=a\Delta BDE+a\Delta ACB+a\Delta ABE$$

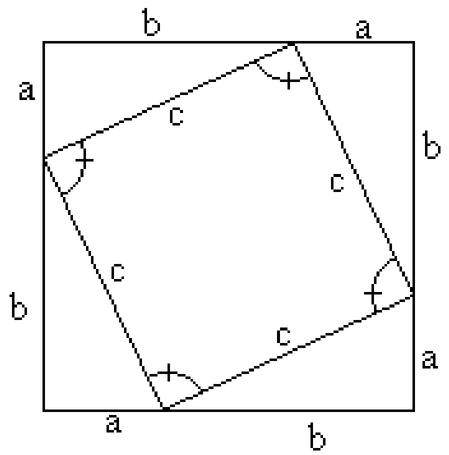
$$= \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{c^2}{2}$$

$$= ab + \frac{1}{2}c^2$$

Logo, temos que $\frac{1}{2}(a+b)^2 = ab + \frac{c^2}{2}$. Isto é, $c^2 = a^2 + b^2$.

Isto termina a prova.

Outra demonstração do teorema de Pitágoras se baseia na figura abaixo:



Por LAL cada um dos triângulos são congruentes. Portanto, todos têm as hipotenusas congruentes. Além disso, caro leitor, os ângulos do quadrilátero interno medem 90º. Portanto, é um quadrado. Logo, temos

$$(a+b)^2 = \frac{4ab}{2} + c^2$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2, \text{ isto é,}$$

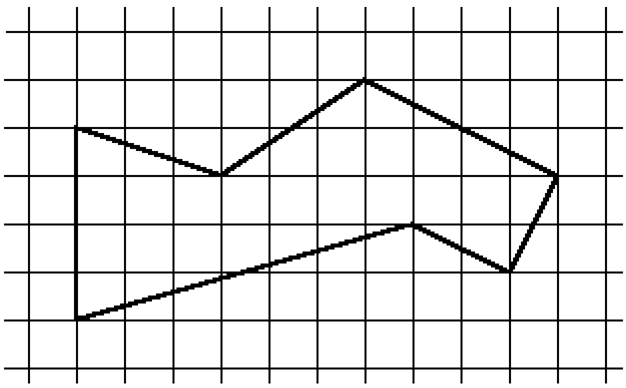
$$c^2 = a^2 + b^2 \,.$$

Desafio: pesquise quantas demonstrações distintas existem do Teorema de Pitágoras.

14. FÓRMULA DE PICK PARA A ÁREA

Sabemos como determinar a área de polígonos particulares. Quando queremos determinar a área de uma região poligonal qualquer, nós a decompomos em regiões triangulares, calculamos a área de cada uma e somamos. Existe, porém, um outro modo de calcular a área de uma região poligonal.

Consideremos no plano um conjunto de pontos, que chamaremos reticulado, de modo tal que cada grupo de 4 pontos "próximos" forme um paralelogramo de área 1. Cada um destes paralelogramos é chamado célula.



<u>Teorema 40 (Fórmula de Pick)</u> -A área de uma região poligonal de vértices sobre o reticulado é dada por:

$$A = \tfrac{1}{2}b + c - 1;$$

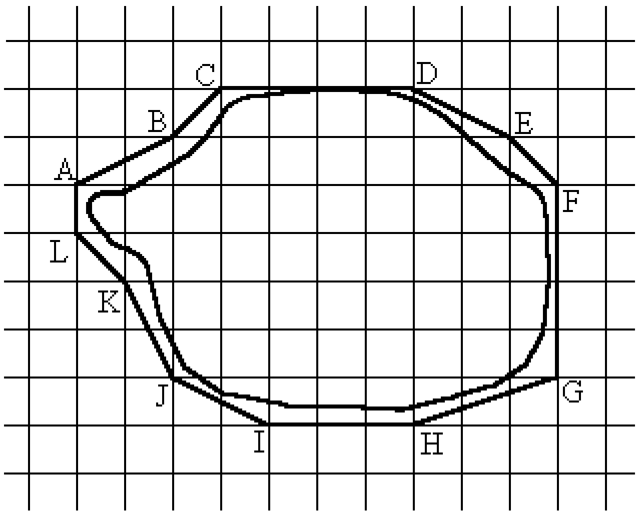
onde: b é o número de pontos do reticulado que estão sobre os lados da região poligonal

c é o número de pontos do reticulado que estão no interior da região poligonal.

A região da figura anterior tem área igual a

A = ...

Consideremos agora uma figura qualquer, não necessariamente com vértices sobre um reticulado. Não conhecemos um modo de determinar a sua área; temos então uma maneira de estimar a sua área.

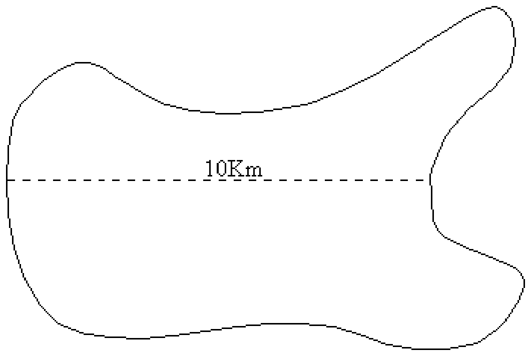


Dada a figura que se deseja determinar a área, trace um reticulado e aproxime a figura por um polígono com vértices sobre o reticulado. A área do polígono é uma aproximação da área da figura. Pela fórmula de Pick a área aproximada é ....

É claro que se o reticulado for mais fino a aproximação é melhor.

Exercício

1. Use a fórmula de Pick para dar uma aproximação da área da ilha abaixo. Explique seu procedimento. Sugira mais atividades usando a fórmula de Pick. Por exemplo, a área de uma folha de planta, a área do Estado do Paraná.



Mais sobre a fórmula de Pick:

15. A FÓRMULA DE PICK COMPUTACIONAL

I. Introdução

O cálculo de áreas de figuras planas desempenha um papel fundamental nos mais diversos ramos da Matemática e em muitas aplicações a outras áreas do conhecimento. Em geral o estudante se depara com o conceito e o cálculo de áreas já nas séries iniciais do primeiro grau. A fórmula de Pick dá um critério interessante para o cálculo de área de polígonos com vértices sobre uma malha.

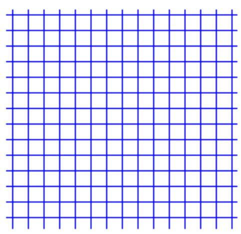


Figura 1

Antes de passarmos para a fórmula, vejamos alguns conceitos: cada ponto de interseção de retas da malha é chamado de **nó** e cada pequeno quadrado é chamado **célula** e cada célula possui uma unidade de área. Veja figura 1.

Dado um polígono com vértices sobre os nós de uma malha, a fórmula de Pick nos fornece a área do polígono sabendo apenas quantos são os nós da malha sobre o bordo do polígono, *b*, e quantos são os nós da malha interiores ao polígono, *i*. Mais exatamente, a área é dada por

$$A = i + \frac{b}{2} - 1.$$

Na figura 2, temos i=22 e b=16 e portanto a área procurada é 29 unidades de área.

A forma geral para a fórmula de Pick pode ser enunciada como abaixo.

<u>Teorema 41 (Pick)</u>: Seja S reunião finita de regiões poligonais com vértices sobre os nós de uma malha. Se v denota o número total de nós da malha em S e, e_b é o número de lados do bordo de S (aqui consideramos que dois nós consecutivos do bordo formam um lado), então a área de S é dada por

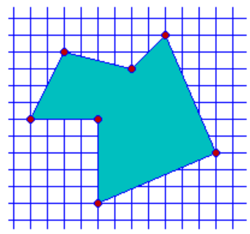


Figura 2

$$A = v - \frac{e_b}{2} - \chi,$$

onde χ=1 - m é a característica de Euler de S e m é o número de buracos de S.

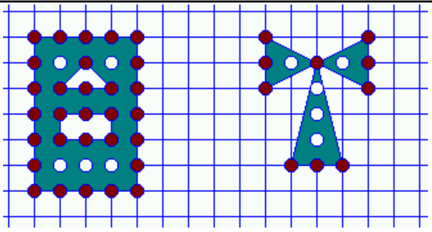


Figura 3

Veja a figura 3, nela a figura da direita tem v=15, χ = 1 e e_b =12, o que dá 8 unidades de área. Na figura da esquerda temos v = 35, χ = -1 e e_b =30 dando 21 unidades de área. Uma prova deste teorema pode ser encontrada em [2] e para uma prova no caso elementar veja [3].

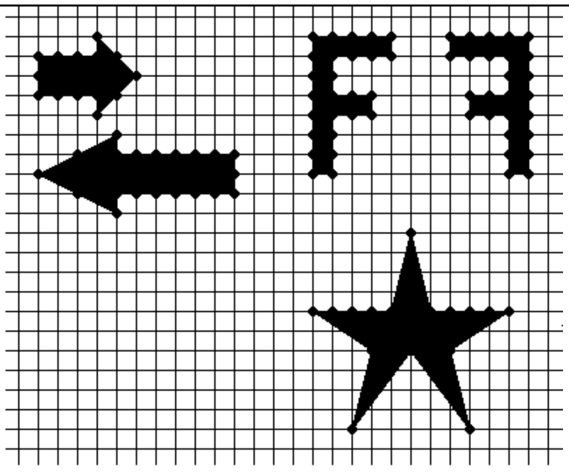


Figura 4

II. O programa Pick e sugestões de atividades

Com base na fórmula de Pick e no estudo de suas aplicações, elaboramos um programa em linguagem Pascal, cuja função é apresentar uma malha para o usuário demarcar o polígono. Feito isto o programa identifica quantos e quais são os pontos interiores e os pontos do bordo e calcula a área do polígono utilizando a fórmula de Pick. Usamos resultados avançados de topologia diferencial de [1] para decidir se um ponto é ou não interior ao polígono. O programa pode ser manipulado pelo mouse ou pelo teclado e oferece algumas opções tais como: salvar o polígono desenhado, alterar o tamanho da célula da malha ou simplesmente traçar polígonos ou ainda esperar que o usuário calcule a área de um polígono apresentado.

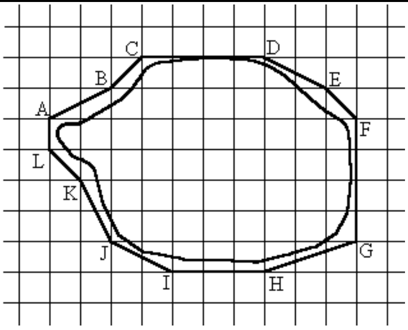


Figura 5

O programa Pick pode ser utilizado para desenvolver algumas atividades em sala de aula com alunos de primeiro e segundo graus. Pode ser usado nas séries iniciais para explorar os conceitos de interior, exterior, área, simetrias do plano e as formas geométricas simples. Pode ser usado até para descobrir em forma de brincadeira a regra de sinais na multiplicação dos inteiros: a flecha de comprimento *n* muda de sentido quando multiplicada por "menos". O programa não permite ainda trabalhar com reuniões de polígonos ou regiões poligonais com buracos, isto já está sendo implementado.

No segundo grau a fórmula de Pick pode ser utilizada para estimar a área de uma figura plana não necessariamente poligonal em associação ou não com a noção de escala ampliando as aplicações do teorema. É claro que neste caso a aproximação é tão boa quanto menor for a célula da malha. Veja figura 5.

O programa Pick foi desenvolvido no Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá e está em constante atualização, as pessoas interessadas em obter uma cópia podem nos enviar correspondência com diskete pequeno de alta densidade que o mesmo será devolvido com as instruções e o programa.

III. Bibliografia

[1] GUILLEMIN, Victor, & POLLACK, Alan. **Differential Topology**, Prentice - Hall, Inc. New Jersey, 1974.

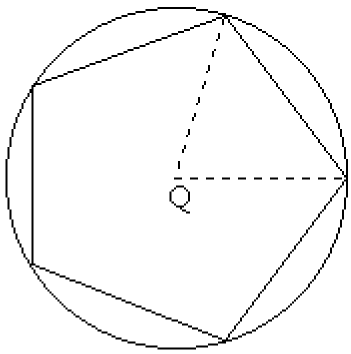
[2] HADWIGER, H. & WILLS, J. M. Neure Studien über Gitterpolygone, J. Math, 280 (1975)61-69.

[3] ANDRADE, D. - A Formula de Pick**,** Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, Vol. 9 No. (1988) 119-126.

15. POLÍGONOS REGULARES

Estamos ainda trabalhando com polígonos convexos. Uma classe especial de polígonos é o conjunto de polígonos regulares. São polígonos regulares aqueles que são equiláteros e equiângulos ao mesmo tempo.

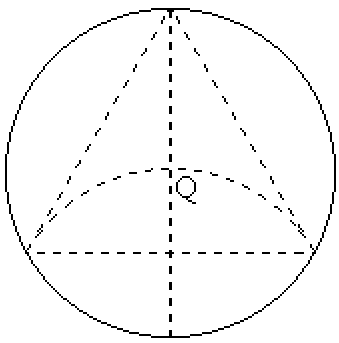
Podemos construir um polígono regular com qualquer número de lados pelo seguinte método: começamos com uma circunferência de centro Q e raio r > 0. Primeiro dividimos a circunferência em n arcos congruentes (n é o número de lados). Cada um desses arcos mede $\frac{360}{n}$. A cada arco traçamos uma corda correspondente. Isto nos dá um polígono regular.



Portanto, para podermos construir polígonos regulares precisamos saber como dividir a circunferência. Vejamos:

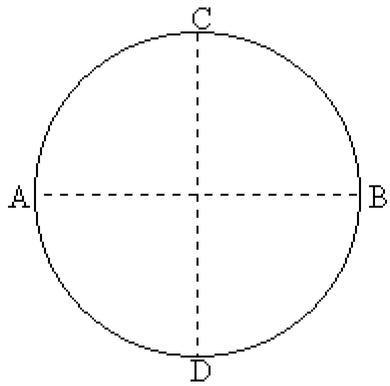
1) **Método para dividir a circunferência em 3 partes**.

Dada a circunferência de centro **O** e diâmetro $\overline{AB}$, com centro em **B**, trace um arco **ef**. Una **A** a **e** e **A** a **f**. Os arcos **Ae**, **Af** e **ef** são as três partes.



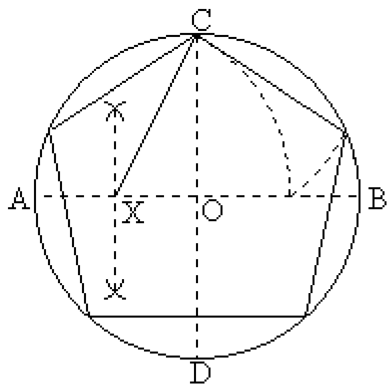
2) **Método para dividir a circunferência em 4 partes**

Traçar o diâmetro $\overline{AB}$, perpendicular a este traçar o diâmetro $\overline{CD}$. A, B, C e D cortam a circunferência em 4 partes.



3) **Método para dividir a circunferência em 5 partes**.

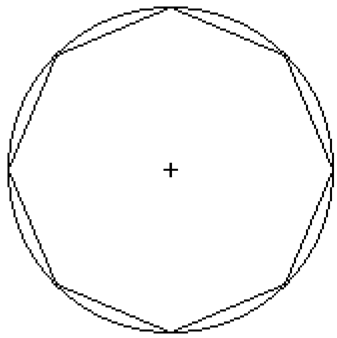
Traçar os dois diâmetros perpendiculares $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Tomar um raio qualquer, $\overline{OA}$ por exemplo, e divida-o em duas partes congruentes. Seja X o ponto médio. Com centro X, transporte C sobre o raio $\overline{OB}$, determinando Y. Tome a medida CY e transporte sobre a circunferência a partir de C encontrando 1. Continuando teremos a circunferência dividida em 5 partes.



4) **Método para dividir em 6 partes**.

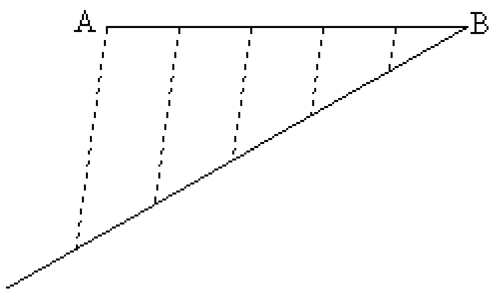
Escreva você o método.

5) Em geral usamos o transferidor para dividir a circunferência em n arcos congruentes, cada um medindo $\frac{360}{n}$. Vamos desenhar um octógono regular. Calculemos $\frac{360}{8}$. Desenhe uma circunferência e marque sobre ela arcos de 45º. A desvantagem deste método é que ele não é muito preciso. Por que?



6) **<u>Método de Bion</u>**: É o método mais geral; é usado para dividir a circunferência em qualquer número de partes.

Antes recordemos como dividir um segmento em n partes iguais. Façamos para n = 5.



1 - Traçar os diâmetros perpendiculares.

2 - Traçar os arcos xy e yx com abertura igual ao diâmetro.

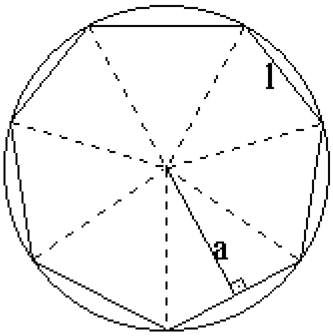
3 - Divida um diâmetro em n partes iguais.

4 - Unir x e y aos pontos ímpares (ou pares).

5 - Acabou.

Definição: A distância a do centro de um polígono regular a cada um dos lados é chamada apótema. O perímetro p=nl, onde n é o número de lados e l é o comprimento do lado.

Observe a figura abaixo,



É claro que $A = n\frac{1}{2}al = \frac{1}{2}ap$

Construa a tabela de ângulos internos de um polígono regular.

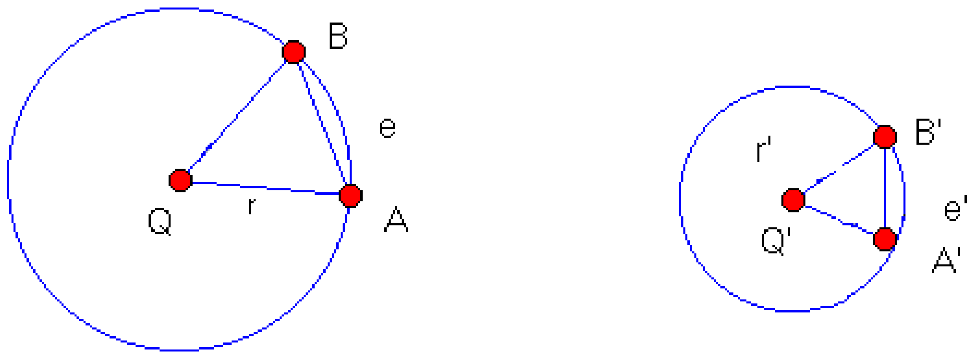
Polígono regular	nº de lados	soma dos ângulos internos	ângulo interno
triângulo eqüilátero	3	180º	60º
Quadrado	4	360º	90º
pentágono regular	5	540º	108º
hexágono regular	6	720º	-------
heptágono regular	7	900º	-------
octógono regular	8	1080º	-------
Nonágono	9		-------
n-ágono	n	(n-2)180º	$\frac{(n-2)180^{o}}{n}$

16. A CIRCUNFERÊNCIA E O NÚMEO π

Se medirmos o comprimento de uma circunferência qualquer e dividirmos este número pela medida de seu diâmetro, encontraremos para quociente o número 3,14159..., que o representamos pela letra grega π.

Propriedade 42: A razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro é a mesma para todas as circunferências.

De fato, sejam dadas a circunferência de centro Q e raio r e uma outra de centro Q' e raio r'. Inscrevemos um n-ágono regular em cada uma delas.



Por LAL, temos que $\Delta QBA \sim \Delta Q'B'A'$. Segue que

$$\frac{e'}{r'} = \frac{e}{r} \Rightarrow \frac{ne'}{r'} = \frac{ne}{r} \Rightarrow \frac{p'}{2r'} = \frac{p}{2r}.$$

Como p e p' tendem para C (o comprimento da circunferência) quando n tende a infinito, podemos escrever

$$\frac{C'}{2r'} = \frac{C}{2r}.$$

A esta razão denominamos π.

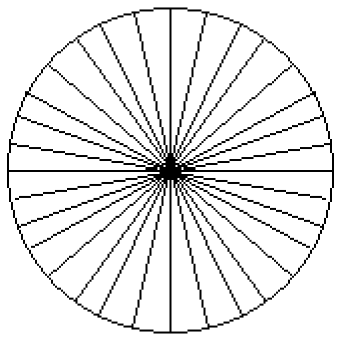
$$\text{Como } \frac{C}{2r} = \pi \text{, então } C=2\pi r.$$

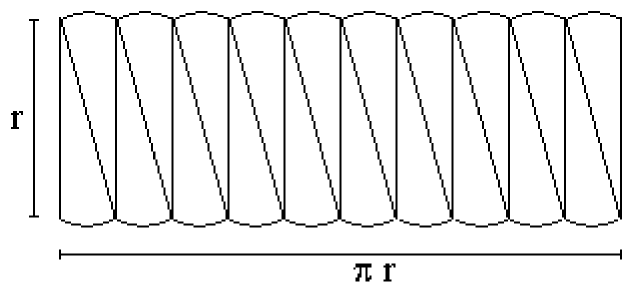
Isto termina a prova.

Vamos usar o comprimento da circunferência para determinar a área encerrada por ela de uma maneira intuitiva.

Um modo prático para obter a área do círculo é a seguinte:

- cortemos o círculo ao meio ao longo de um dos diâmetros
- recortemos cada metade, ao longo dos raios, em partes iguais
- juntemos as partes encaixando-as como abaixo





Temos uma figura bem próxima de um paralelogramo. Portanto, a área do círculo é aproximadamente igual a área do "paralelogramo" acima. Isto é,

$$A=\pi.r.r$$

$$A=\pi r^2$$

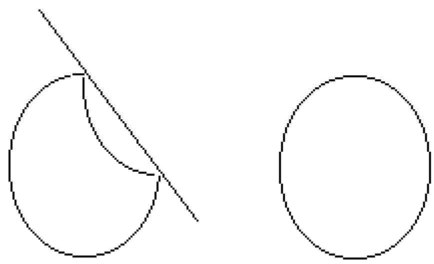
O Círculo na História

Conta a lenda da fundação da cidade de Cartago, que Elisa filha do rei Pigmaleão daria a sua filha a porção de terras que ela cercasse com o couro de uma única vaca. Ela cercou uma área circular. Seria esta a forma geometrica que encerraria a maior área?

Este é o conhecido problema isoperimétrico que pode ser resumido da seguinte forma: dentre todas as curvas simples fechadas de comprimento L, qual encerra a maior área?

Este problema já era conhecido pelos gregos que também sabiam da sua solução: o círculo. Uma prova deste fato só foi dada por K. Weierstrass em 1870.

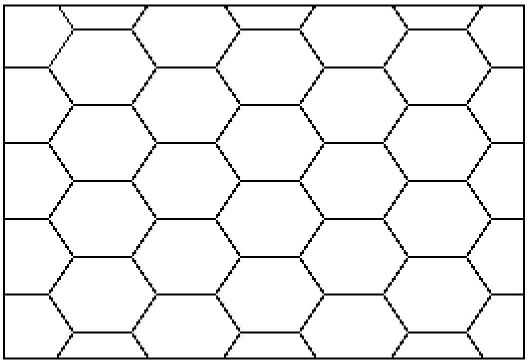
Você pode verificar facilmente que a curva solução do problema tem que ser convexa. De fato, observe as duas figuras:

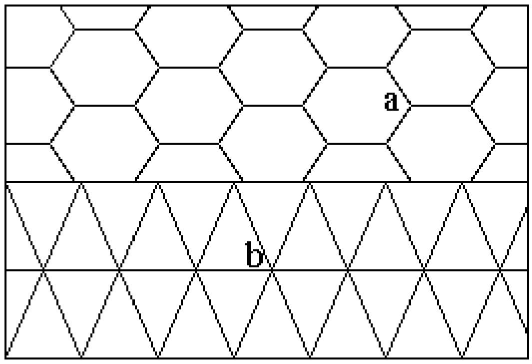


17. LADRILHAMENTO DO PLANO

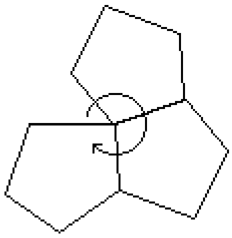
Você já reparou nos ladrilhos da sua casa? Eles cobrem toda a parede sem se sobreporem, não é? Mas qual é a forma dos ladrilhos da sua casa? Que outros polígonos (ladrilhos) também ladrilham o plano?

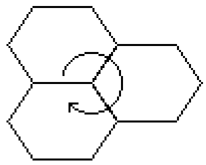
Vejamos alguns exemplos. Observe os pontos A e B.

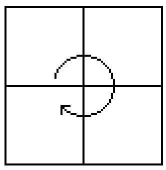


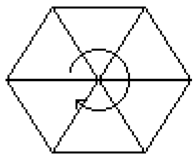


Nos pontos A e B, a soma dos ângulos internos dos polígonos em redor destes pontos deve ser 360º (uma volta completa).









Logo, para um polígono regular ladrilhar o plano é necessário que a soma dos ângulos internos em redor de tais pontos seja 360º. Portanto, se o polígono regular tem n lados e k é o número de ângulos internos próximos dos pontos, então ocorrerá

$$k(n-2)\frac{180}{n} = 360$$

isto é, $k\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{360}{n} = 360$, simplificando

$\frac{k}{n}\left(\frac{n}{2}-1\right) = 1$, ou $k(n-2) = 2n \Rightarrow k = \frac{2n}{n-2}$

Valores de n ($n \geq 3$)	Valores obtidos para k
3	6
4	4
5	k não é inteiro
6	3

A tabela indica que 6 triângulos regulares (equiláteros) se encontram num ponto, 4 quadrados e 3 hexágonos regulares. Estes são os únicos polígonos regulares que ladrilham o plano.

Existem maneiras diferentes de ladrilhar um plano:

a) usando mais de um tipo de polígono regular

b) usando polígonos não regulares

c) usando outras figuras planas.

18. ISOMETRIAS DO PLANO

Uma isometria á uma transformação inversível do plano que preserva distâncias. As isometrias do plano são de quatro tipos:

i) Reflexão

2i) Translação

3i) Rotação

4i) Translação refletida

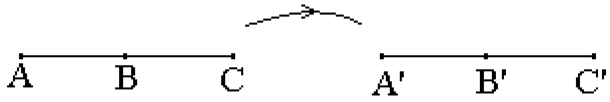
Alguns resultados importantes sobre isometrias:

1) Toda isometria leva 3 pontos colineares em 3 pontos colineares.

2) Toda isometria leva 3 pontos não colineares em 3 pontos não colineares.

3) Isometrias levam reta em reta.

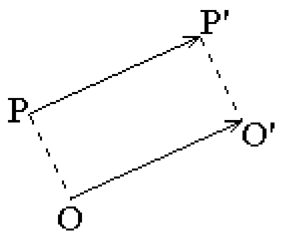
4) Isometrias conservam a ordem dos pontos.

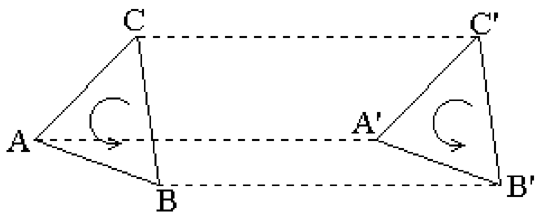


5) Isometrias conservam ângulos.

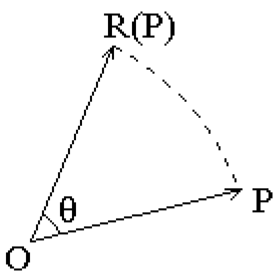
6) Isometrias conservam distância entre retas paralelas.

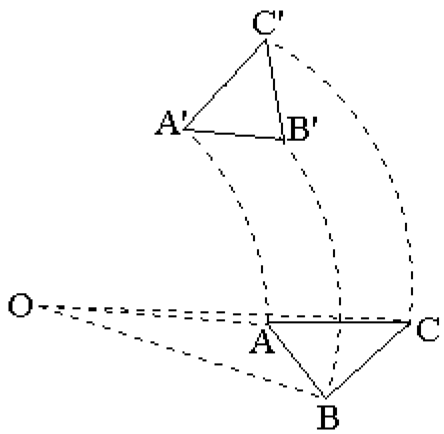
Definição de translação: Dados pontos O e O’, chama-se translação a isometria que associa cada ponto P do plano num ponto P’, tal que POO’P’ seja um paralelogramo.





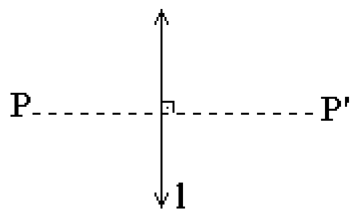
Definição de Rotação: Uma isometria R é dita uma Rotação de centro O e ângulo θ, se o ponto R(P) está sobre uma circunferência de centro O e raio OP com ângulo POR(P) congruente a θ.

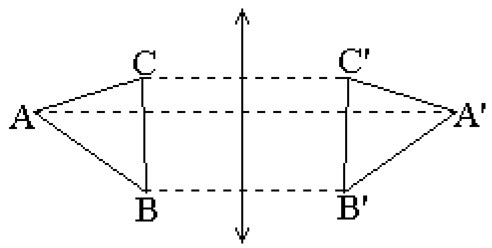




Reflexões: As reflexões são as isometrias mais importantes, pois toda isometria pode ser representada como produto de no máximo três reflexões. Este é um teorema importantíssimo dentro da teoria das isometrias planas.

Seja l uma reta. A aplicação que leva cada ponto P do plano num ponto P', simétrico de P em relação à reta l, chama-se reflexão na reta l. A reta l é chamada eixo de reflexão. Representa-se esta reflexão por R_l.

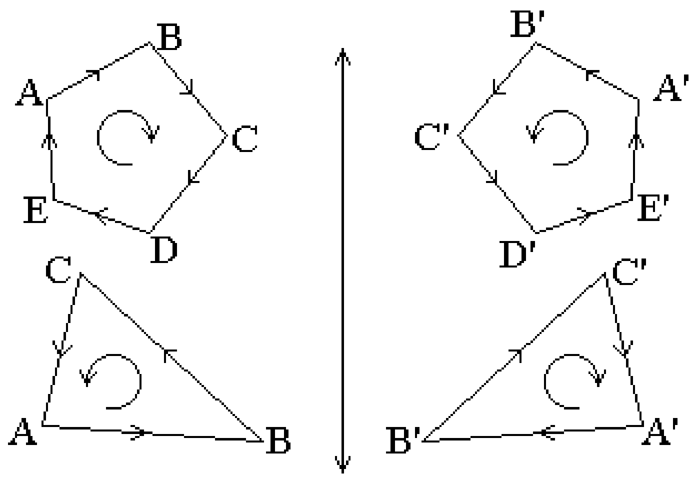


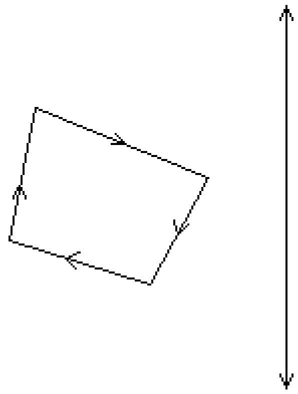


Observe que:

a) Uma Reflexão R_l só mantém fixos os pontos de seu eixo.

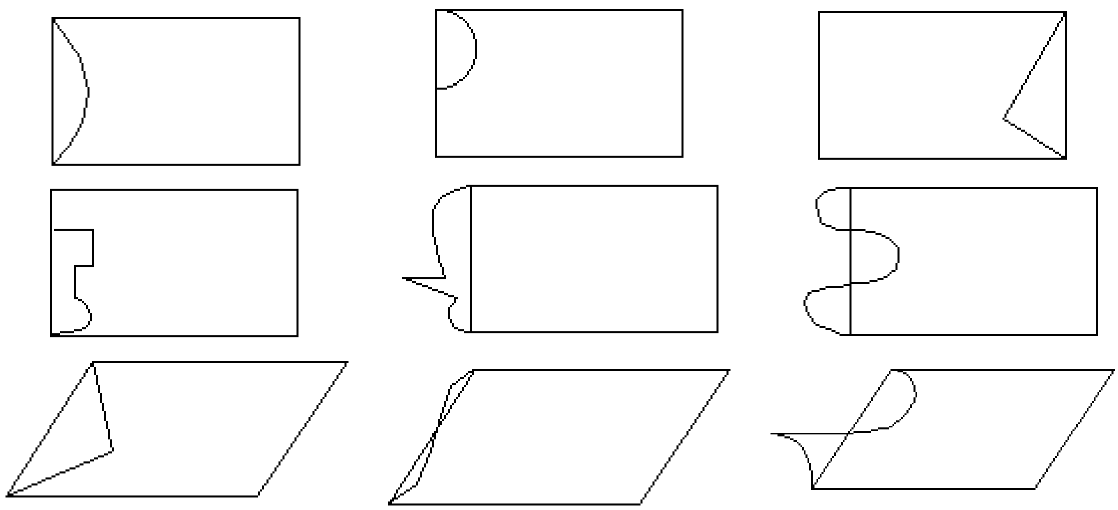
b) Uma Reflexão R_g altera a orientação de uma figura.



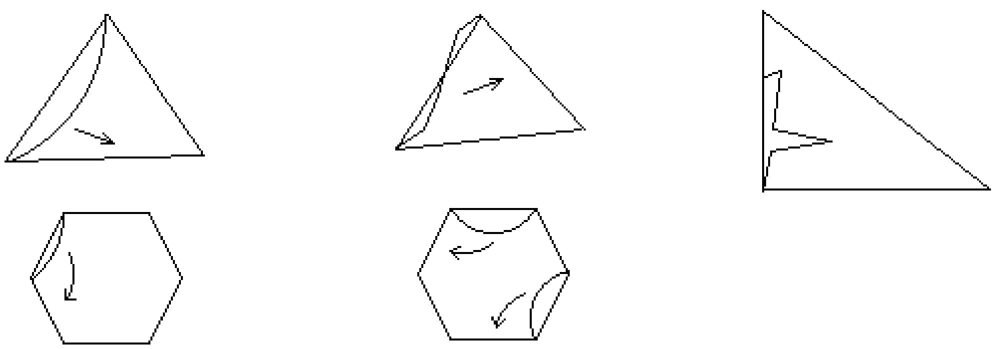


<u>Exercícios</u>:

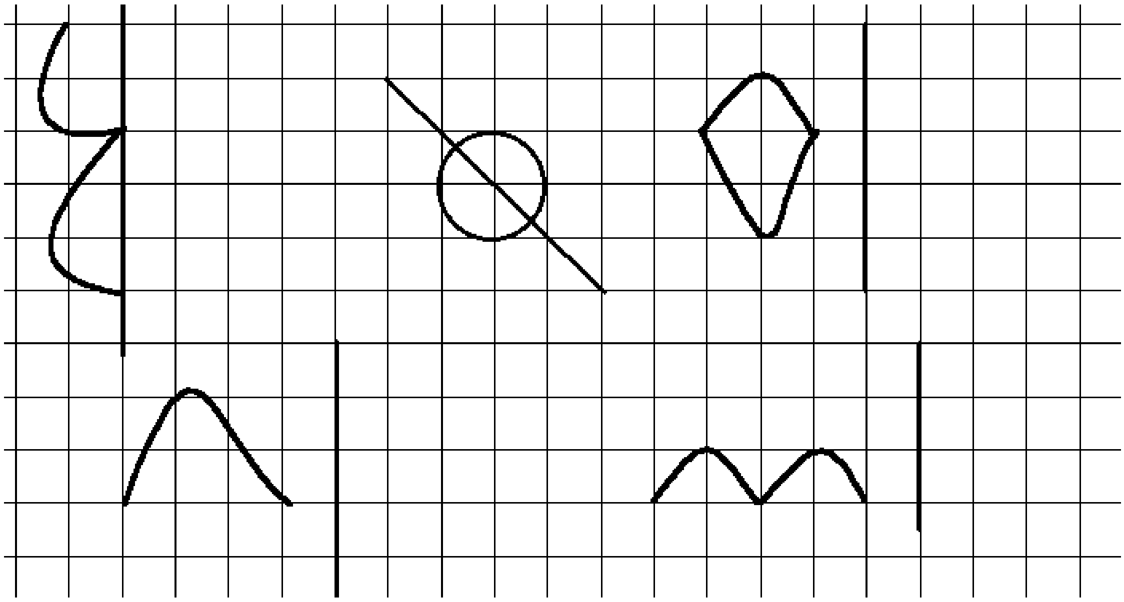
1) Aplicar uma translação à curva sobre o lado oposto do paralelogramo. Observe que a área da figura foi preservada.



2) Aplicar uma rotação às curvas abaixo. Como centros de rotação use um extremo do lado indicado. A área da nova figura não será alterada.



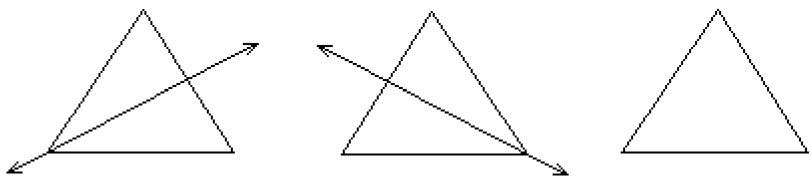
3) Construa uma reflexão de curvas em torno de retas dadas.



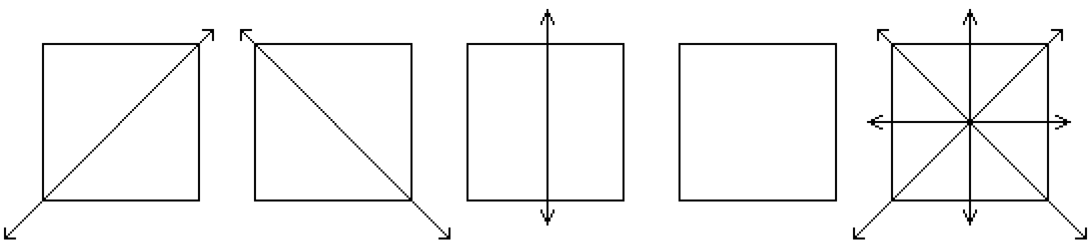
.

Sugestão: use papel quadriculado.

4) Linhas de reflexão do triângulo equilátero. Complete. São três.



5) Linhas de reflexão do quadrado.



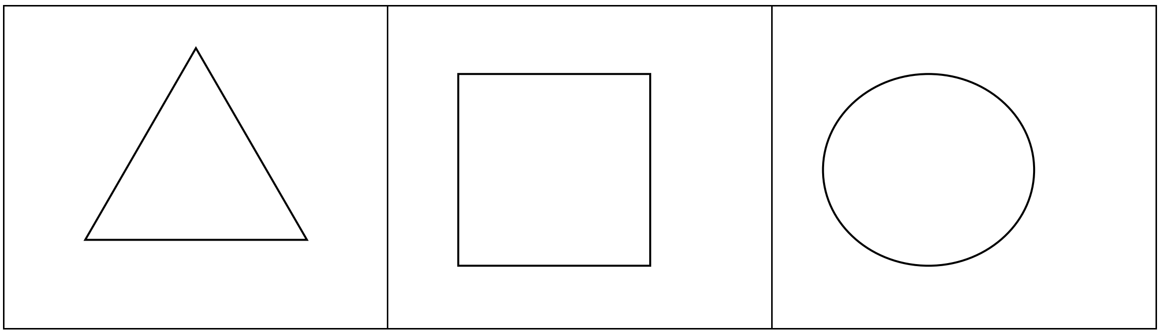
Simetria em relação a uma reta

Muitas figuras planas são simétricas em relação a uma reta. O eixo de simetria funciona como um espelho: cada ponto de um lado tem seu correspondente do lado do eixo, a uma distância igual na perpendicular pelo ponto a ele.

Dê exemplos de figuras da natureza que são simétricas com relação a uma reta.

Diga quantos eixos de simetria tem cada figura:

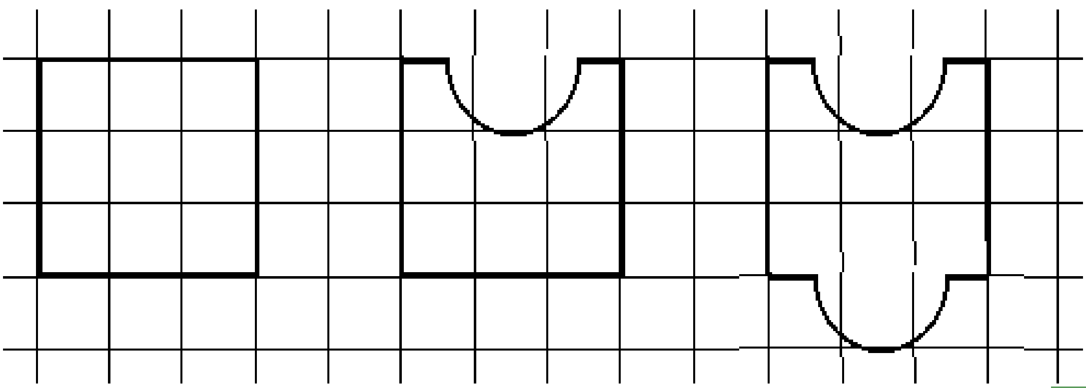
triângulo equilátero, quadrado, círculo.



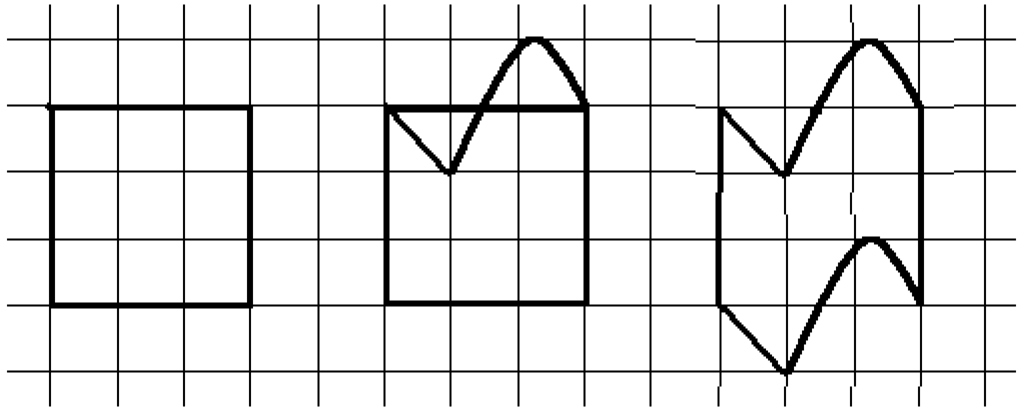
<u>Atividades 1</u>:

Vamos dar um processo de obter figuras que ladrilham o plano. Este processo baseia-se nas simetrias estudadas anteriormente. Este processo consiste numa alteração dos lados de um polígono regular que ladrilha o plano.

Consideremos o quadrado abaixo e observe as alterações realizadas mediante translação. Observe que a área não é alterada.



Outra alteração



Crie mais uma alteração usando o quadrado.

Crie outras figuras que ladrilhem o plano, usando o triângulo equilátero ou hexágono.

19. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

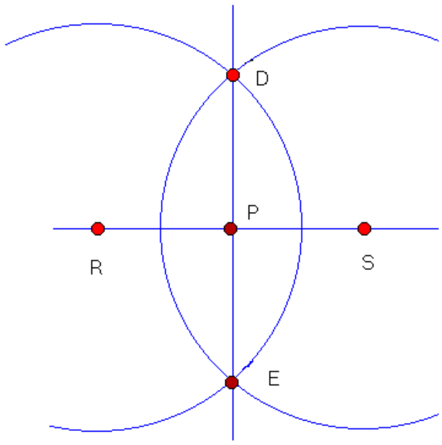
1. **Construir por um ponto P de uma reta l uma perpendicular**.

Construção: i) Tomamos em l pontos R e S eqüidistantes de P.

2i) Traçamos uma circunferência de centro R passando por S.

3i) Traçamos a circunferência de centro S passando por R, determinando os pontos D e E.

4i) A reta $\overline{DE}$ é perpendicular a l passando por P.



<u>Justificativa</u>: são congruentes os triângulos ΔDPR e ΔDPS (LLL).

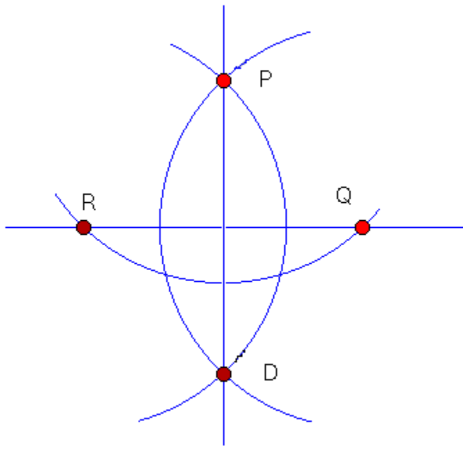
2. **Construir por P fora da reta l uma perpendicular.**

<u>Construção</u>: i) Tomamos em l um ponto Q.

2i) Traçamos uma circunferência de centro P passando por Q. Se a interseção dessa circunferência com a reta l se reduz ao ponto Q, a reta $\overleftrightarrow{DP}$ é a perpendicular à reta l. Se não, seja R o outro ponto de interseção da reta l com a circunferência.

3i) Traçamos a circunferência de centro Q passando por P e a circunferência de centro R passando por P. Determinamos um ponto D.

4i) A reta $\overleftrightarrow{PD}$ é a perpendicular procurada



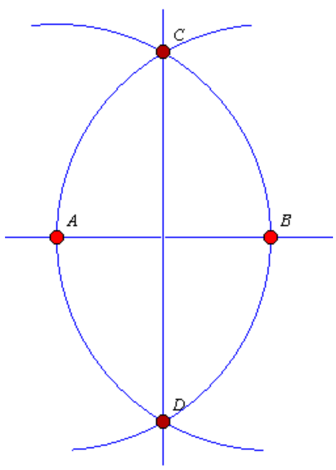
Justificativa: O quadrilátero □PQDR é um losango, pois PQ=QD=DR=PR. E sabemos que as diagonais de um losango são perpendiculares.

3. **Determinar o ponto médio de um segmento $\overline{AB}$.**

Construção: i) Traçamos a circunferência de centro A passando por B, e a circunferência de centro B passando por A.

2i) Suas interseções são C e D.

3i) A interseção de $\overline{CD}$ com $\overline{AB}$ é o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$.



Justificativa: O quadrilátero □ADBC é um losango, e num losango as diagonais são perpendiculares, se cortam ao meio.

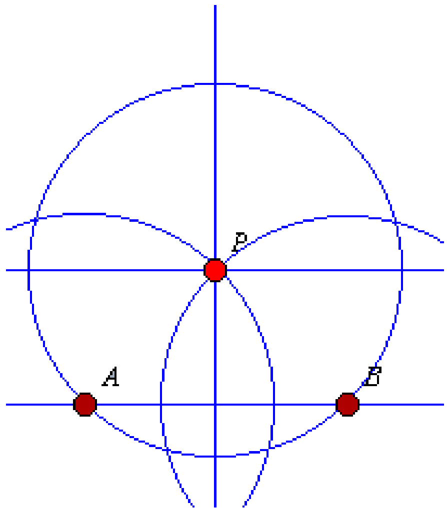
Encontre o ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ qualquer.

4. **Construir por um ponto P fora da reta l, a reta paralela a l.**

Construção: i) Pelo ponto P traçamos a reta t perpendicular à reta l.

2i) Pelo ponto P traçamos a reta s perpendicular à reta t.

3i) A reta s é a paralela procurada.



Justificativa: Se uma transversal forma ângulos correspondentes congruentes com um par de retas, então elas são paralelas.

5. **O transporte de segmentos**

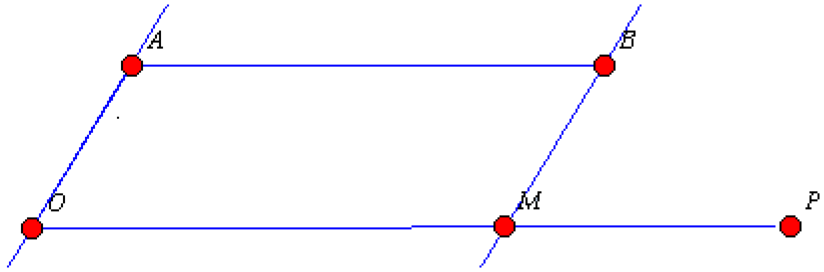
1º caso: Dado o segmento $\overline{AB}$ e a semi-reta $\overrightarrow{OP}$, com $\overline{AB} // \overrightarrow{OP}$, vamos construir em $\overrightarrow{OP}$ um ponto M de forma que OM=AB.

Construção: i) Orientamos o segmento $\overline{AB}$ no mesmo sentido de $\overrightarrow{OP}$.

2i) Traçamos a reta que passa por O e A.

3i) Por B traçamos a paralela a $\overline{OA}$ que intercepta $\overrightarrow{OP}$ em M.

4i) OM=AB.



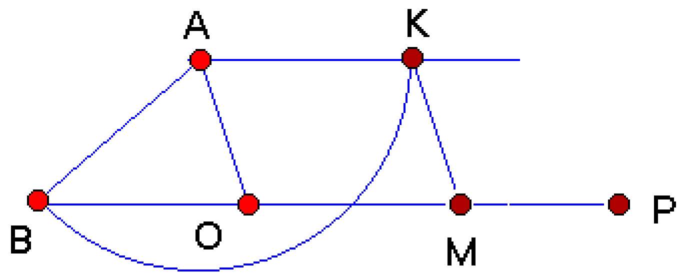
Justificativa: O quadrilátero □OABM é um paralelogramo, portanto lados opostos são congruentes.

2º caso: Dados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OP}$ com $\overrightarrow{AB}$ não paralelo a $\overline{OP}$, vamos construir em $\overrightarrow{OP}$ um ponto M, de forma que AB=OM.

Construção: i) Por A trace a semi-reta l paralela $\overrightarrow{OP}$ e de mesmo sentido.

2i) A circunferência de centro A e raio AB corta l em K, então AB=AK.

3i) Recaímos no caso anterior. Pelo ponto K traçamos a paralela a $\overline{OA}$ que corta $\overline{OP}$ em M, OM=AB.



6. **O transporte de ângulos**

Dado um ângulo AÔB, construir um ângulo, congruente a AÔB, que tenha por um dos lados a semi-reta $\overline{PQ}$.

Construção: i) Tomamos M em $\overrightarrow{OA}$, arbitrário.

2i) A circunferência de centro O que passa por M corta $\overrightarrow{OB}$ em N.

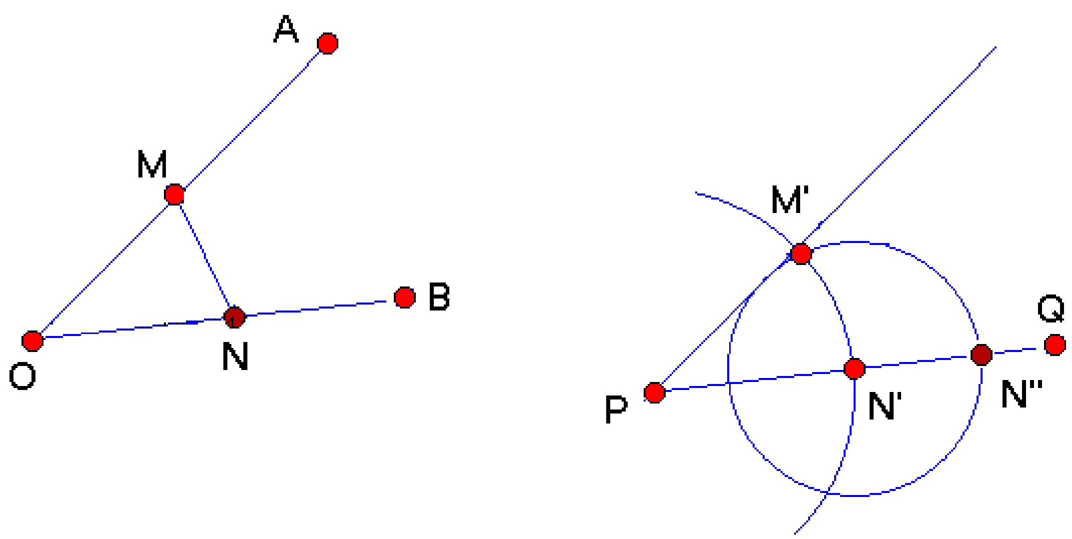
3i) Transportamos $\overline{ON}$ para $\overline{PQ}$ obtendo N'.

4i) Traçamos a circunferência de centro P que contém N'.

5i) Transportamos $\overline{NM}$ sobre $\overline{PQ}$, a partir de N', obtendo N".

6i) Traçamos a circunferência de centro N' que contém N". Essa circunferência intercepta a primeira circunferência em dois pontos, seja M´.

7i) O ângulo $M'\hat{P}Q$ é congruente a $A\hat{O}B$.



<u>Justificativa</u>: Os triângulos ΔOMN e ΔPM'N' são congruentes por LLL.

6. **Divisão de um segmento de reta em n partes congruentes**.

Faça você. Divida um segmento $\overline{AB}$ qualquer em n=5 partes congruentes.

<u>Construção</u>: i) Por A traçamos uma semi-reta $\overrightarrow{AC}$, onde C não está em $\overline{AB}$.

2i) Agora tomamos em $\overline{AC}$ um ponto P_1 e transportamos $\overline{AP_1}$ sucessivamente sobre $\overline{AC}$ para encontrar $P_2,...,P_n$.

3i) Traçar a reta $\overleftrightarrow{P_nB}$ e por P_i retas paralelas a $\overline{P_nB}$.

4i) As interseções dessas retas com $\overline{AB}$ dividem o segmento em n partes congruentes.

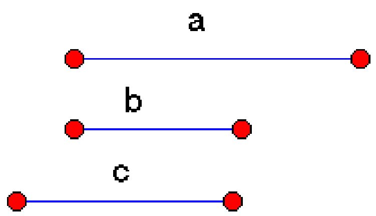
Justificativa: Teorema de Tales.

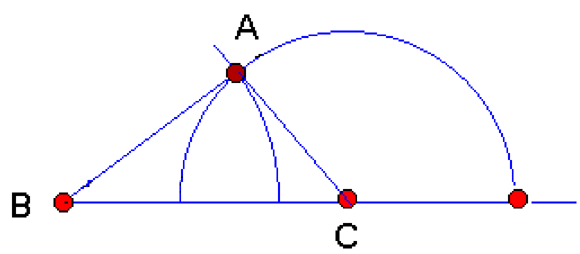
8. **Construção de um triângulo conhecendo-se as medidas dos lados**.

São dadas as medidas a, b e c dos lados de um triângulo ABC. Construí-lo de forma que o lado $\overline{BC}$ esteja na semi-reta r de origem B.

Construção: i) Com centro em B, traçamos a circunferência de raio a, obtendo C em r.

2i) Com centro em C, traçamos a circunferência de raio b, com centro B traçamos uma circunferência de raio c. Uma das interseções dessas circunferências é o ponto A.

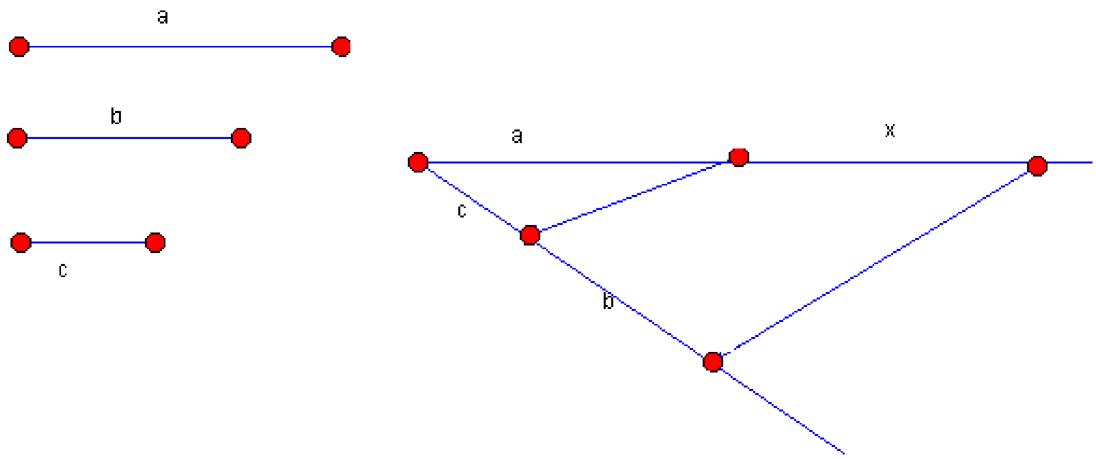




9. **A quarta proporcional**

Dados três segmentos de medidas a, b e c, o segmento cuja medida x satisfaz $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ é chamada uma quarta proporcional.

Sejam:



<u>Construção e Justificativa</u>: Teorema de Tales.

10. **A construção da 3ª proporcional**.

Dados dois segmentos de medidas a e b, o segmento cuja medida x satisfaz $\frac{x}{a} = \frac{a}{b}$ é denominado uma 3ª proporcional dos segmentos dados.

Dados a e b abaixo, construir x tal que $\frac{x}{a} = \frac{a}{b}$.

<u>Construção e Justificativa</u>: Teorema de Tales. Deixamos a construção como exercício.

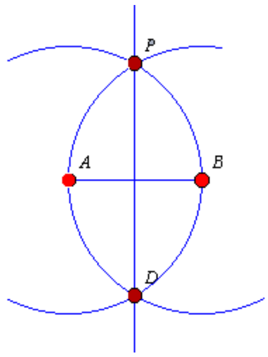
11. **A Mediatriz** de um segmento $\overline{AB}$ é uma reta perpendicular a $\overline{AB}$ passando pelo seu ponto médio. Pode-se provar que a mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é a reta que contém todos os pontos do plano que são eqüidistantes das extremidades.

Construção: i) Dado o segmento $\overline{AB}$ trace uma circunferência de centro A e raio AB.

2i) Trace uma circunferência de centro B e raio AB.

3i) As interseções das circunferências determinam dois pontos P e Q.

4i) A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz.



Justificativa: □APBQ é um losango, e $\overline{PQ}$ contém 2 pontos eqüidistantes de A e B.

As construções geométricas que vimos aqui usaram apenas régua e compasso. Historicamente, as construções geométricas sempre foram realizadas assim. Os antigos gregos descobriram a maioria das construções que vimos até aqui. Alguns problemas de construções geométricas desafiaram os matemáticos gregos por muitos anos, é que eles eram difíceis e até mesmo impossíveis.

Um dos problemas difíceis que resistiu a 2 mil anos de estudos, é a construção de um polígono regular de 17 lados. A construção tão procurada foi descoberta por Gauss no século 19. Gauss provou que se p é um primo impar, então o polígono regular de p lados é construtível se, e somente se, p é da forma

$$p = 2^{2^t},$$

para algum inteiro $t \geq 0$.

Segue do Teorema de Gauss que é impossível construir um polígono regular de 7 lados, um polígono de 11 lados e um polígono regular de 13 lados.

Muitas construções geométricas importantes são impossíveis de serem realizadas, o que fazemos é uma aproximação. Vamos falar rapidamente sobre algumas delas.

A duplicação do cubo

Se tivermos um cubo com volume igual a 1 unidade de volumes, duplicá-lo significa determinar um cubo de dimensão x cujo volume seja 2 unidades de volume. Isto é, $x^3 = 2$. Como sabemos da Álgebra, $\sqrt[3]{2}$ não é um número construtível apenas com régua e compasso, portanto impossível de ser construído.

A trissecção de um ângulo

Trissectar um ângulo significa dividi-lo em três partes congruentes. Se fosse possível trissectar um ângulo qualquer, seria possível também trissectar o ângulo de 60 graus. Assim, deveríamos ter $\cos(60) = \cos(3.20)$. Sabemos da trigonometria que $\cos(3.\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$, assim tomando $\alpha = 20$ graus, temos que

$$4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) = \frac{1}{2}.$$

Fazendo $x = 2\cos(\alpha)$, obtemos o seguinte

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

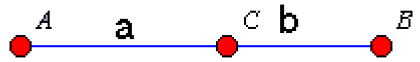
Sabemos da Álgebra que este polinômio é irredutível sobre os números racionais e assim suas raízes não são construtíveis com régua e compasso.

A quadratura do círculo

Dado um círculo, desejamos construir um quadrado de mesma área. Se o círculo tem área $R^2\pi$, então o quadrado tem medida do lado igual a $R\sqrt{\pi}$. Sabemos da Álgebra que $\sqrt{\pi}$ é impossível de ser construído com régua e compasso.

Razão Áurea

Um segmento está dividido em seção áurea ou em média e extrema razão, quando a razão da parte maior para a parte menor é igual ao todo para a parte maior. A razão áurea é denotada por τ .



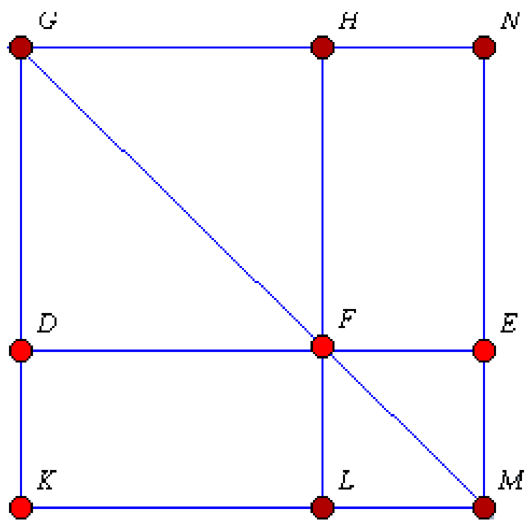
Da definição temos

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$$

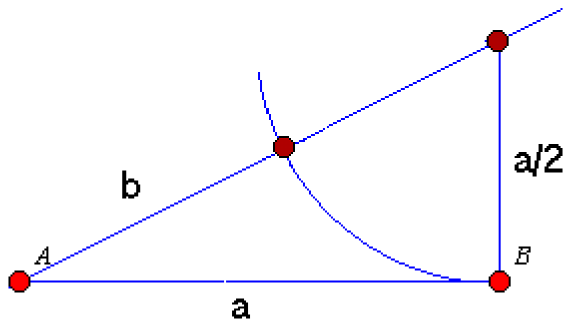
que resulta na equação do segundo grau $a^2-ab-b^2=0$.

Tomando $b=1$, obtemos para a o valor áureo $\tau=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

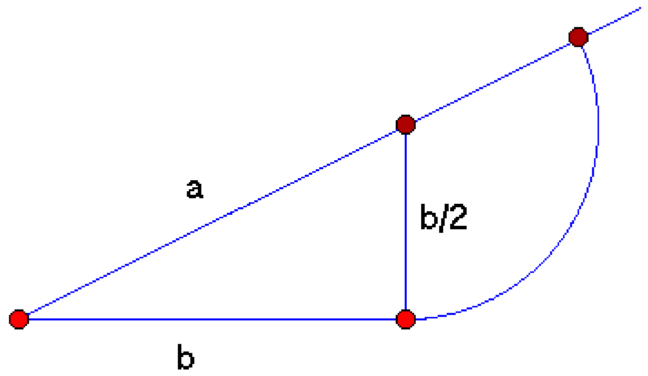
Um retângulo é chamado áureo quando tem seus lados em razão áurea.



Vamos ver alguns exemplos.
Suponha que um segmento foi dividido em duas partes. Se conhecemos a parte maior deste segmento, vamos determinar a outra parte de modo que a divisão seja áurea. Veja a construção abaixo.



Agora, se conhecemos a parte menor deste segmento, vamos determinar a outra parte de modo que a divisão seja áurea. Veja a construção abaixo.



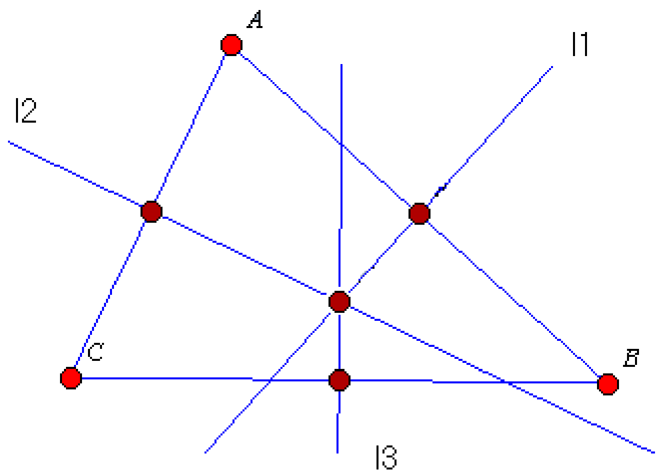
Luca Pacioli escreveu ***De divina proportione,*** um livro que ilustra as mais belas aparições do número áureo na geometria.

20. CONCORRÊNCIA DAS MEDIATRIZES, BISSETRIZES E ALTURAS DE UM TRIÂNGULO

Teorema 43 (concorrência das mediatrizes) - As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes, o ponto de concorrência é eqüidistante dos vértices do triângulo.

Demonstração: Suponhamos dado o ΔABC. Sejam L_1, L_2 e L_3 as mediatrizes dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. se L_1 e L_2 fossem paralelas, então $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ seriam paralelas, pois $L_1 \perp \overline{AB}$ e $L_2 \perp \overline{AC}$. Mas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ se interceptam. Logo, L_1 e L_2 se interceptam em algum ponto P.

Como as mediatrizes são retas que contém os pontos eqüidistantes dos vértices, então P está eqüidistante de A, B e C.



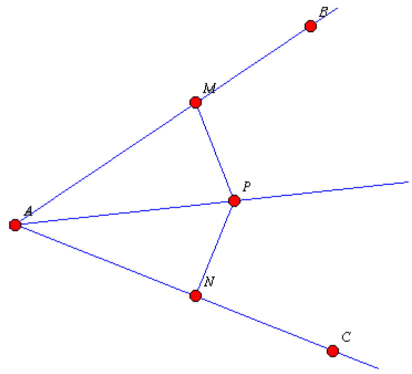
Isto conclui a prova.

Aplicação: Como circunscrever uma circunferência a um triângulo?

Construção: A interseção das 3 mediatrizes do triângulo dão um ponto P eqüidistante dos vértices.

12. **A Bissetriz** de um ângulo BÂC é a semi-reta que divide o ângulo BÂC em dois ângulos congruentes. Pode-se provar que a bissetriz de um ângulo BÂC é o conjunto de pontos do interior do ângulo que são eqüidistantes dos lados.

Para provar que se P está na bissetriz, então ele é eqüidistante dos lados, use ALA para concluir que os triângulos ΔAMP e ΔANP são congruentes (Veja figura).

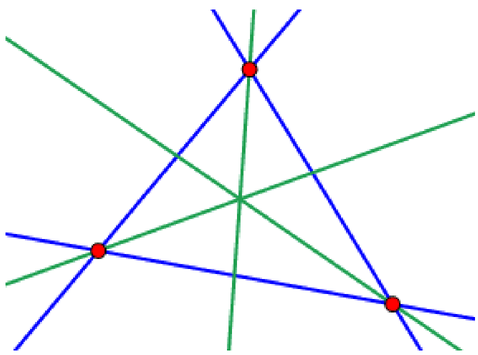


Para provar a 2ª parte, se P é eqüidistante dos lados, observe que ΔAMP e ΔANP são retos, têm a hipotenusa comum e $\overline{PM}$ e $\overline{PN}$, são congruentes. Logo, os triângulos são congruentes e $M\hat{A}P \cong P\hat{A}N$. Isto conclui a prova.

<u>Teorema 44</u> (concorrência das bissetrizes) - As bissetrizes de um triângulo são concorrentes em um ponto P que é eqüidistante dos três lados.

<u>Demonstração:</u> Se P está na bissetriz do ângulo:

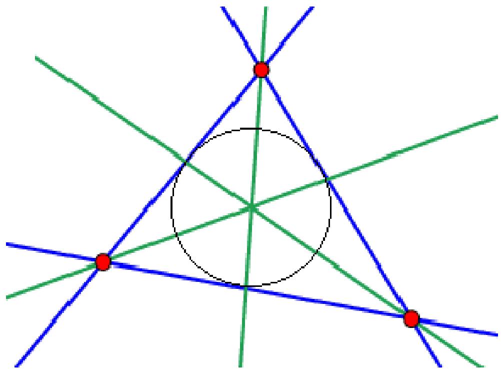
- $B\hat{A}C$, então P é eqüidistante de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.
- $B\hat{C}A$, então P é eqüidistante de $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.



Isto conclui a demonstração.

Aplicação: Como inscrever uma circunferência em um triângulo dado?

Construção: A interseção das bissetrizes é um ponto P eqüidistante dos lados. Determine a perpendicular de P a um lado do triângulo, encontrando D. O raio da circunferência é $\overline{PD}$



As alturas de um triângulo também se encontram. Mas o ponto de concorrência não é necessariamente interior ao triângulo.

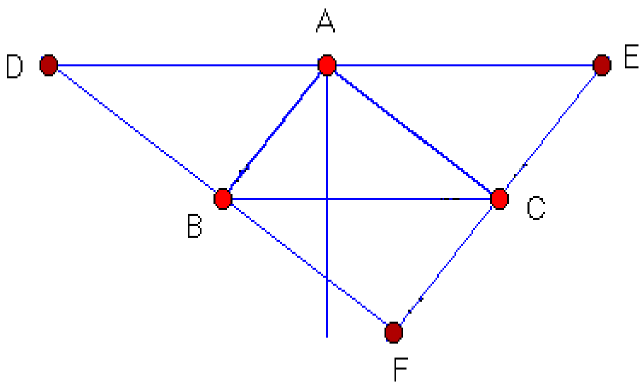
Teorema 45 (concorrência das alturas) – As alturas de um triângulo são concorrentes em um ponto P.

Demonstração: Vamos usar a figura abaixo. Dado o triângulo ΔABC, pelos seus vértices traçamos retas para paralelas aos lados opostos. Quaisquer duas dessas retas não são paralelas, determinando portanto um triângulo ΔDEF. Como os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, concluímos que

$$AD = BC = AE.$$

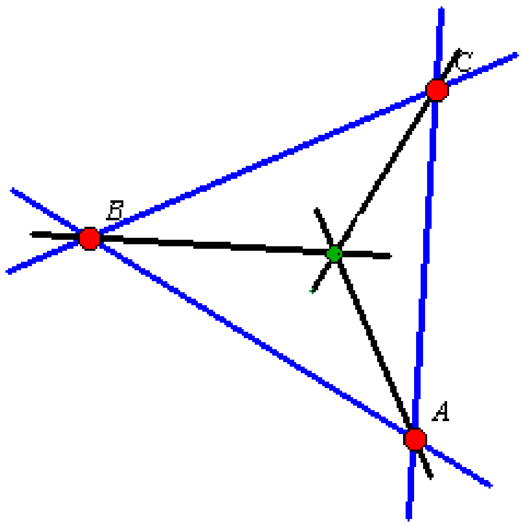
Assim, a altura pelo ponto A, perpendicular a $\overline{BC}$, é a mediatriz de $\overline{DE}$.

Do mesmo modo, as outras duas alturas do triângulo ΔABC são as mediatrizes dos outros dois lados do triângulo ΔDEF. Como as mediatrizes são concorrentes, segue que as alturas do triângulo ΔABC são concorrentes.



Isto conclui a demonstração do teorema.

Na figura a seguir as alturas do triângulo se encontram num ponto interior ao triângulo, mas isto não é sempre verdade.



21. POLIEDROS REGULARES

Os poliedros regulares são apenas cinco: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Provaremos isto mais adiante, ainda nesta seção.

Os poliedros convexos são chamados de regulares se satisfazem às seguintes exigências:

a) Todas as faces do poliedro são polígonos regulares congruentes entre si.

b) De cada vértice do poliedro parte o mesmo número de arestas.

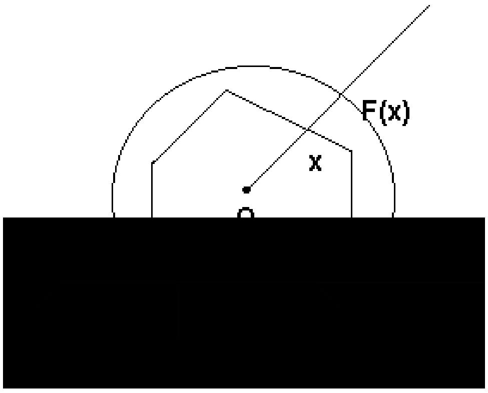
Estes poliedros particulares já eram conhecidos pelos geômetras gregos da antiguidade, mas coube a Euler provar em 1758 que num poliedro vale a relação:

$$V - A + F = 2,$$

onde V denota o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces do poliedro. Hoje sabemos que muitos outros poliedros satisfazem esta relação. Coube a Poincaré, descobrir que de fato, o número $V - A + F$ para um poliedro P é um invariante topológico. A este número chamamos de característica de Euler-Poincaré, é denotado por χ. Mais precisamente, se P e Q são poliedros homeomorfos (deformação contínua), então eles têm a mesma característica.

Observe que a esfera S é homeomorfa a qualquer poliedro regular e assim $\chi(S) = 2$. Mais precisamente, esfera e poliedros convexos são homeomorfos.

A figura sugere como construir um homeomorfismo entre um poliedro convexo P e a esfera S; projete P a partir do ponto interior 0 sobre a esfera.



Uma demonstração bem geométrica para o teorema de Euler é devida a Cauchy, os comentários ilustram os passos da prova:

Seja P um poliedro (suponha convexo para facilitar).

1º Dado um poliedro P, retira-se uma face. Isto não altera V e A, mas F diminui uma unidade. Logo, basta provar que a relação V - A + F = 1 vale para o poliedro modificado.

2º Abre-se o poliedro modificado sobre um plano. Os lados da face retirada são chamados arestas livres.

3º Traçam-se as diagonais que não se cortam, triangularizando a figura, V não muda, mas A e F aumentam de uma unidade. Assim, (V - A + F) não se altera. As faces agora são triângulos.

4º Retiram-se uma a uma as faces que tem alguma aresta livre. O número (V - A + F) não se altera.

5º Retirando-se uma a uma, as faces que tem alguma aresta livre, chega-se à última que é o triângulo no qual vale V - A + F = 1.

Use modelos de papel para realizar os passos da demonstração de Cauchy.

A prova de Cauchy pode ser encontrada no livro “Meu professor de Matemática” do professor Elon Lages Lima, ou na revista “Matemática Universitária” número 2, de 1985. São Dele os comentários anteriores.
A prova de Cauchy é muito elaborada, pois ela prova o teorema de Euler para uma classe muito grande de poliedros. Aqui faremos a prova apenas para poliedros convexos. A demonstração dada a seguir está na RPM3 e é um trabalho do professor Zoroastro.

Teorema (Cauchy): Em todo poliedro convexo P, tem-se sempre V - A + F = 2.
Demonstração: Seja r uma reta que não seja paralela a nenhuma das faces de P, seja α um plano perpendicular a r e que não corta P. É fácil ver que toda reta paralela a r corta P em apenas um ou dois pontos. A projeção de P sobre α é um polígono convexo P’ cujo retorno γ é a projeção de uma poligonal fechada γ, formada por arestas de P. Cada ponto de γ‘ é projeção de um único ponto de γ.

A poligonal γ é chamada contorno aparente. Cada ponto de P’ é projeção de dois pontos de P. Dados dois pontos com a mesma sombra, chamaremos de ponto iluminado aquele que está mais distante de α; o mais próximo será chamado sombrio.

Assim o poliedro P se decompõe em três partes disjuntas: o contorno γ, os pontos iluminados e os pontos sombrios.

Seja P_1 o conjunto dos pontos iluminados de P mais o contorno aparente γ. Agora, cada ponto de P' é projeção de um único ponto de P_1.

Denotaremos por P'_1 o polígono decomposto como reunião de polígonos justapostos, que são projeções das faces contidas em P_1, isto é, das faces iluminadas, P'_2 indicará o conjunto restante, as projeções das faces sombrias.

Se decompusermos cada face de P em triângulos, traçando em cada uma delas diagonais, alteraremos os números F e A individualmente, mas a expressão (V - A = F) permanecerá como mesmo valor. De fato, cada vez que se traça uma diagonal numa face, os números F e A aumentam, cada um, de uma unidade e o número V não muda. Assim, (V - A + F) não muda. Logo, poderemos supor que todas as faces do poliedro P são triângulos.

Toda face tem (agora) três arestas e cada aresta pertence a duas faces, assim $3F = 2A$.

A idéia principal da prova é calcular de duas maneiras diferentes a soma s dos ângulos internos dos triângulos que compõem o poliedro P.

Em primeiro lugar há F triângulos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é π. Assim, $S = \pi F$. Como $F = 3F - 2F = 2A - 2F$, temos:

$$S = 2\pi A - 2\pi F.$$

Por outro lado, temos $S = S_1 + S_2$, onde S_1 é a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e S_2 é a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios. Para calcular S_1 notemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo T é igual a soma dos ângulos internos de sua projeção T'. Segue que S_1 é igual a soma dos ângulos internos dos triângulos que compõe, P'_1 (projeção de P_1).

Agora vamos calcular S somando os ângulos vértice a vértice. Sejam V_1 - número de vértices iluminados, V_0 = número de vértices do contorno γ e V_2 = número de vértices sombrios. Então:

$$V = V_0 + V_1 + V_2$$

Observe que V_0 é também o número de vértices (e de lados) da poligonal γ', o contorno de P'.

Em P'_1 temos V_1 vértices interiores (projeções dos vértices iluminados) mais V_0 vértices no contorno λ'. A soma dos ângulos que tem como vértice um dado vértice interior é igual a 2π.

A soma de todos os ângulos que tem vértice sobre λ' é igual a $\pi(V_0 - 2)$, de acordo com a expressão bem conhecida da soma dos ângulos internos de um polígono de V_0 lados. Segue que:

$$S_1 = 2\pi \, . \, V_1 = \pi \, (V_0 - 2)$$

Analogamente,

$$S_2 = 2\pi \,.\, V_2 + \pi\,(V_0 - 2)$$

e assim,

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi\,(V_1 + V_2 + V_0) - 4\pi$$
$$S = 2\pi\, V - 4\pi$$

Comparando com $S = 2\pi A - 2\pi F$ e dividindo por 2π, obtemos $V - A + F = 2$, que é o que queríamos provar.

Poliedros convexos regulares são chamados também de poliedros de Platão.

Teorema (Platão) Só existem 5 poliedros de Platão.

Demonstração: Como todas as faces são de um mesmo tipo, vamos supor que sejam polígonos de n lados (n maior ou igual a 3). Seja F é o número de faces, então o número de lados de todos os polígonos é ....e, portanto, o número de arestas do poliedro é

$$A = \frac{\text{............}}{2}\,.$$

Por outro lado, a cada vértice de um poliedro de Platão concorre o mesmo número de arestas. Seja r esse número (r maior ou igual a 3) e seja V o número de vértices. Assim,

$$2\,A = \text{........................}$$

As duas igualdades encontradas permitem que se escreva F e V em função de A:

$$F=\frac{2A}{n} \quad e \quad V=\frac{2A}{r}.$$

Aplicando o teorema de Euler, V-A+F=2, temos

$$\frac{2A}{r}-A+\frac{2A}{n}=.......$$

Como A é não nulo podemos dividir a expressão acima por 2 A, e obtemos

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=\frac{1}{A} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{r}+\frac{1}{n}=\frac{1}{A}+\frac{1}{2}.$$

Como A>0, então $\frac{1}{r}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}$.

Já sabemos que $r \geq 3$ e $n \geq 3$. Suponha que $r > 3$ e $n > 3$. Isto é, $r \geq 4$ e $n \geq 4$,

$$\frac{1}{r} \leq \frac{.......}{......} \quad e \quad \frac{1}{n} \leq \frac{.......}{......},$$

e portanto,

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{n} \leq \frac{.......}{......},$$

o que é absurdo, pois $\frac{1}{r}+\frac{1}{n}$ deve ser maior que $\frac{1}{2}$.

Logo, $r=3$ ou $n=3$.

Se $r=3$, isto é, $\frac{1}{3}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}$ implica que $n \leq ....$, isto é, $n=3,4$ ou 5.

Se $n = 3$, isto é, $\frac{1}{r} + \frac{1}{3} > \frac{1}{2}$ implica que $r \leq$.......... ou $r \leq$..........

ou $r \leq$.......... .

Assim temos apenas 5 possibilidades, que é o que queríamos demonstrar.

Complete a tabela que dá os 5 poliedros regulares

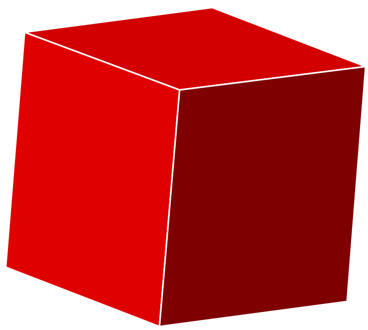
n	r	A	V	F	Nome
3	3	6	4	4	tetraedro
3	4				octaedro
3	5				icosaedro
4	3				hexaedro
5	3				dodecaedro

Teorema 46 (Euler-Poincaré) Em todo poliedro homeomorfo a esfera vale a relação

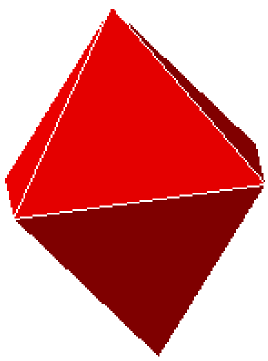
$$V - A + F = 2.$$

Dentre todos os poliedros, os mais conhecidos são os poliedros de Platão ou os regulares regulares. Os poliedros de Platão são poliedros construídos usando múltiplas cópias de um único polígono regular. Vejamos seus modelos e suas planificações.

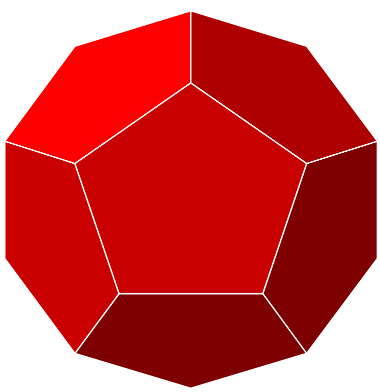
TETRAEDRO



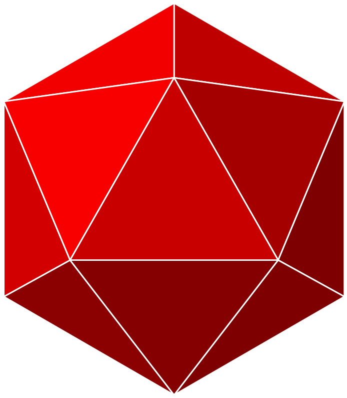
CUBO OU HEXAEDRO



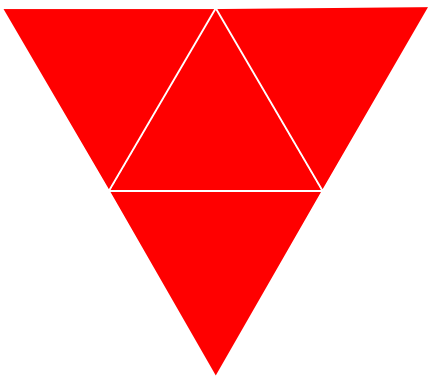
OCTAEDRO

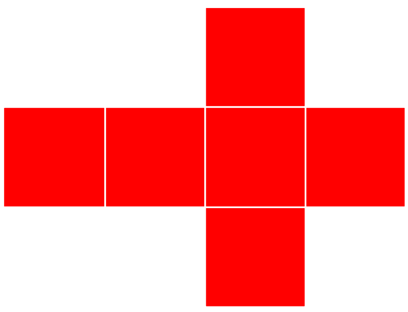


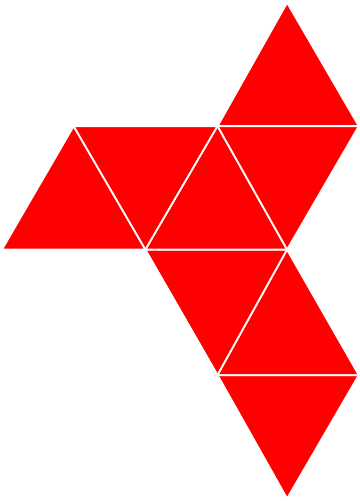
DODECAEDRO

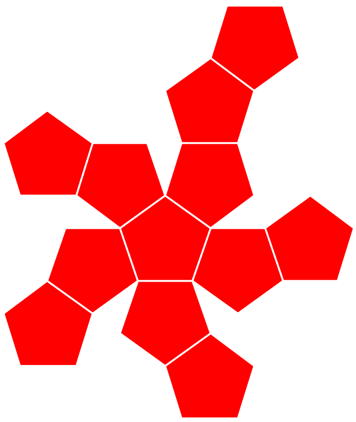


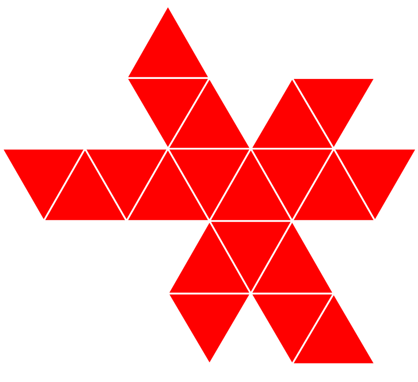
ICOSAEDRO





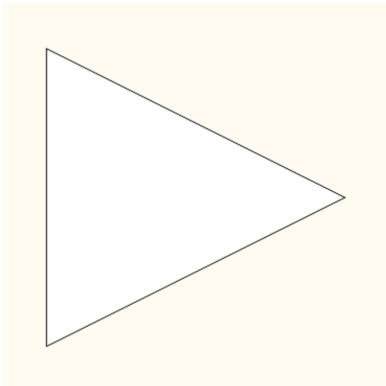






Exercícios:

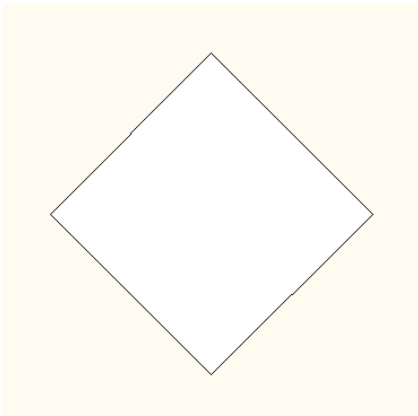
1. Consideremos um triângulo equilátero ΔABC. Como podemos refleti-lo ou girá-lo de modo que ele se encaixe sobre uma cópia de si mesmo?

   Faça um modelo de papel.

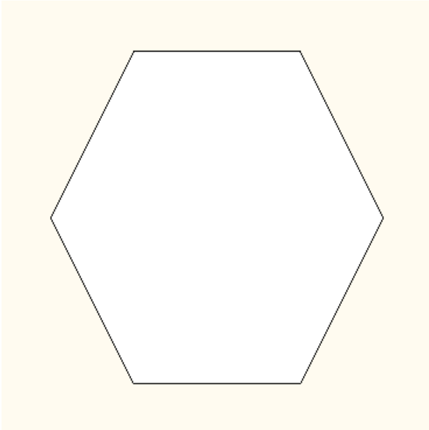
2. Como podemos refletir ou girar um quadrado de modo que ele se encaixe sobre uma cópia de si mesmo?

   Faça um modelo de papel.

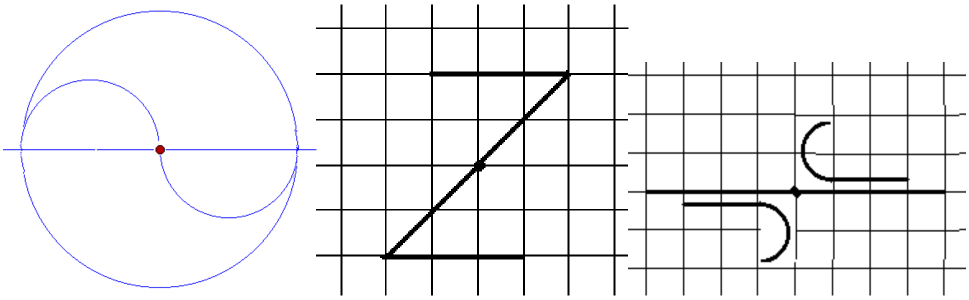
   

3. Considere o polígono hexágono regular abaixo. De quantas maneiras podemos girá-lo em torno do ponto O do centro de modo que ele se encaixe sobre uma cópia de si?

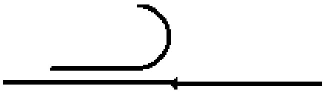
   Faça um modelo de papel.

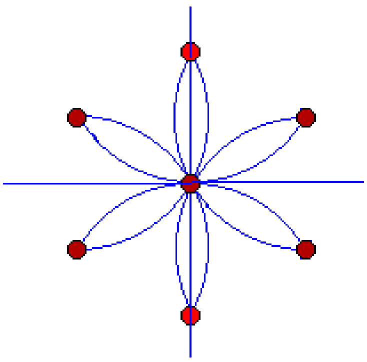


4. As figuras abaixo se giradas de 180º em torno do ponto O....

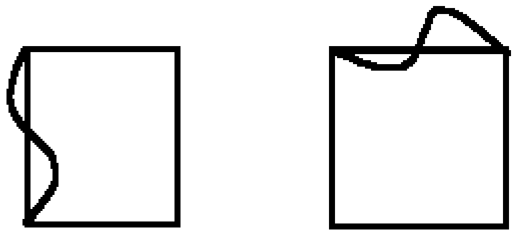


5. As figuras abaixo se giradas de 90º ...

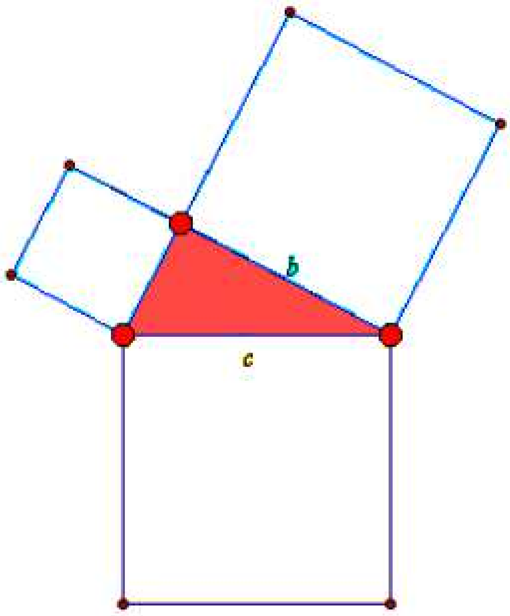




6. Transladar as curvas para o lado oposto como indicado.



7. O “Tangran” é o mais antigo quebra-cabeças chinês. Ele pode ser usado para demonstrar geometricamente o teorema de Pitágoras.
   Construa um triângulo retângulo e sobre seus lados, os quadrados A, B e C. Seja O o ponto de encontro das diagonais do quadrado B (o menor). Trace por O a paralela à hipotenusa do triângulo e depois a perpendicular. Corte as quatro regiões determinadas no interior de B por estas perpendiculares. Pegue estas regiões e mais a região C e ajuste-as sobre o quadrado A (o maior). Você verá que elas cobrem exatamente.



8. Construa pelo método de Bion o heptágono regular.

22.Alguns softwares de Geometria

Cabri-Gèomètrie

O programa Cabri-Gèomètrie, cujo nome veio das iniciais **CA**hier de **BR**ouillon **I**nteractif, que significa em português caderno de rascunho, é um sistema gráfico para construções geométricas. Foi desenvolvido por um grupo de pesquisa do Instituto de Informática e Matemática Aplicada da Universidade Joseph Fourier de Grenoble (França). Este grupo foi liderado por Jean Marie Laborde e teve o apoio do Centro de Nacional de Pesquisa Científica. Foi apresentado pela primeira vez em 1988 no 6° Congresso Internacional de Educação Matemática realizado em Budapeste. Cabri já foi traduzido para mais de 25 línguas e comercializado para mais de 40 países. No Brasil, foi traduzido para o português pela PUC-SP que é também o representante oficial. O patrocinador de Cabri é Texas Instruments

O Cabri permite o traçado de segmentos, circunferências, medição de comprimentos, ângulos e áreas. Traça retas perpendiculares, paralelas e muitas outras facilidades.

Visite o site do Cabri-Gèomètrie http://www.ti.com/calc

Poly

O Poly é um software de visualização de poliedros. Ele foi desenvolvido para auxiliar o professor de Matemática no ensino das formas e propriedades das diversos categorias de poliedros. O Poly pode mostrar as formas poliédricas em três dimensões, é possível girar os poliedros e visualizar suas planificações além de imprimi-las.

Visite o site do Poly http://www.peda.com/poly

Cinderella

Cinderella é um programa para fazer geometria no computador. Surgiu em 1992 durante uma conferência no Instituto Mittag-Leffler, quando Henry Crapo e Jürgen Richter-Gebert tomaram um barco chamado Cinderella. Cinderella é sistema gráfico, baseado na linguagem Java, especialmente desenvolvido para o ensino das Geometrias Euclidiana, Hiperbólica e Elipticas. Com Cinderella é possível traçar retas, circunferências, medição de comprimentos, ângulos e áreas. Todo material desenvolvido em Cinderella pode ser salvo em HTML ou PS.

Visite o site www.cinderella.de

Pick

O programa Pick foi desenvolvido no Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá por Doherty Andrade e Sandro Marcos Guzzo. O programa Pick permite a construção de polígonos e o cálculo de sua área usando o Teorema de Pick.

Visite o site www.dma.uem.br/kit para obter uma cópia do Pick e outras informações.

23. Um pouco de História de Geometria

Os primeiros resultados geométricos datam da antiguidade e tiveram sua origem da experiência prática do homem, isto é, foram obtidas da observação pelo homem em sua atividade diária. Como ciência empírica, a geometria alcançou um período elevado no Egipto devido a necessidade constante de medição das terras com a inundação pelo rio Nilo. No primeiro milênio anterior a nossa era as noções de geometria passaram para os gregos, e foi na Grécia antiga que a geometria iniciou um novo período de grande desenvolvimento. No período compreendido entre os séculos VII e III antes da nossa era, os geômetras gregos enriqueceram a geometria com novos resultados e iniciaram grandes progressos em lógica. Euclides (330-275 AC) resumiu e sistematizou o trabalho dos geômetras gregos em sua obra “Os Elementos”, que é a primeira obra de geometria com exposição fundamentada. Esta obra é impecável do ponto de vista lógico e durante estes 2 mil anos foi a principal fonte de consulta e inspiração dos estudiosos de geometria. Um dos postulados que constam na obra de Euclides é o seguinte:

Postulado V: *Se duas retas cortadas por uma terceira formam, do mesmo lado desta, dois ângulos correspondentes internos cuja soma é menor do que dois ângulos retos, as duas retas prolongadas suficientemente se cortam por este lado da secante.*

Nunca se soube porque Euclides, fez distinção entre postulado e axioma, uma vez que ele os tratava como afirmações consideradas verdadeiras. Por isso, tentou-se demonstrar o quinto postulado. Uma afirmação equivalente ao quinto postulado é dada pela seguinte afirmação:

Por um ponto fora de uma reta dada passa uma única reta paralela a esta.

As tentativas frustradas de demonstrar o quinto postulado fez os geômetras, a partir do século XVIII, duvidar que isto fosse possível. Coube a N. I. Lobachevski (1793-1856) dar exemplo de uma nova geometria em que o quinto postulado fosse falso. Lobachevski substituiu o quinto postulado pela seguinte afirmação:

Por um ponto fora de uma reta passam duas retas que não se cortam.

Lobachevski tinha esperança de obter assim uma contradição, mas não existe contradição alguma.

BIBLIOGRAFIA

1. LEDERGERBER, Erika Brigitta & Ruoff - Isometrias e ornamentos no plano Euclidiano. São Paulo, ATUAL/EDUSP, 1982.

2. MARTIN, George E. - Transformation geometry: and Introduction to symmetry. São Paulo, Springer-Verlag, 1982.

3. MOISE, Edwin E. & DOWS, Floyd L. - Geometria Moderna. São Paulo, Edgard Blucher, 1977.

4. PIERRO NETTO, Scipione di & outros - Elementos de Matemática. São Paulo, Editora Scipione Autores e Editores Ltda., 1979.

5. DEBIASI, Cristina - Tessellature Piane: regione fondamentali dei gruppe cristallografici. Tesi Di Laurea - Libera Universita Degli Studi Di Trento.