Método da Bissecção

Prof. Doherty Andrade –doherty200@hotmail.com

www.metodosnumericos.com.br

1 Introdução

Se estamos interessados em resolver equações não lineares $f(x) = 0$, o método mais simples a ser empregado é o Método da bissecção. Bissectar significa dividir ao meio. Por isso este método é também chamado de médio intervalo. Uma solução de $f(x) = 0$ é também chamada de raiz ou zero de f.

O método da bissecção é inteiramente baseado no Teorema do Valor Intermediário de Bolzano-Weierstrass:

Teorema 1.1 (Valor intermediário) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz $f(a)f(b) < 0$, então existe ao menos um número real $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Em outras palavras, se f é contínua e $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, então t tem uma raiz no intervalo (a, b).

2 O Método da bissecção

Tendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfazendo $f(a)f(b) < 0$, o método da bissecção consiste em dividir o intervalo $[a, b]$ ao meio, obtendo os subintervalos $[a, m]$ e $[m, b]$, onde $m = \frac{a+b}{2}$ e considerar como novo intervalo de busca um dos dois intervalos em que f tem sinais opostos nos extremos.

Em seguida repete-se o procedimento com o subintervalo escolhido da bissecção deste. Após um número finito de subdivisões ou encontramos uma solução ou sabemos que a raiz encontra-se em algum subintervalo $[a_k, b_k]$.

Como escolher corretamente o próximo subintervalo?
Consideremos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(a)f(b) < 0$. Seja $m = \frac{a+b}{2}$ o ponto médio de $[a, b]$. Note que se $f(a)f(m) < 0$, então o teorema do valor intermediário garante que a raiz se encontra no intervalo $[a, m]$. Neste caso, para o próximo passo devemos escolher $[a, m]$ (o subintervalo à esquerda de m).

Se $f(a)f(m) > 0$, multiplicamos essa desigualdade por $f(a)f(b)$ e então temos que

$$f(a)f(m)f(a)f(b) = [f(a)]^2 f(m)f(b) < 0,$$

pois $[f(a)]^2 > 0$. Segue que $f(m)f(b) < 0$ e, portanto, pelo teorema do valor intermediário, a raiz se encontra no intervalo $[m, b]$. Neste caso, para o próximo passo devemos escolher $[m, b]$

(o subintervalo à direita de m). Note que a medida que avançamos no método da bissecção, o comprimento de cada subintervalo é metade do intervalo anterior.

Chamando $a_0 = a$ e $b_0 = b$ e efetuando sucessivas bissecções, obtemos intervalos $[a_k, b_k]$ e pontos médios m_k. Note que $|b_k - a_k| = b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k} \to 0$ quando $k \to \infty$.

3 Método prático

Uma maneira prática para utilizar o método da bissecção é organizar da forma apresentada a seguir para a função $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin(x)$, ($x$ sempre em radianos).

Note que $f(x) = 0$ se, e somente se, $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \sin(x)$.

Traçando os dois gráficos, vemos que eles se cruzam perto de $x = 2$. Logo, existe uma solução perto de $x = 2$. Veja a figura 1. Como $f(1.5)f(2) < 0$, pelo teorema do valor intermediário f tem uma raiz no intervalo $[1.5; 2]$.

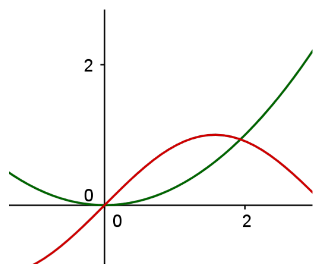

Figura 1: Gráfico de $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ e $\sin(x)$ se cruzam na solução.

• **Exemplo 3.1** Vamos determinar uma aproximação positiva para a solução no intervalo $[1.5; 2]$ da equação $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - \sin(x) = 0$, x em radianos, pelo método da bissecção. Veja a tabela 1.

Tabela 1: Tabela para bissecção

k	a_k	b_k	m_k	$f(a_k)f(m_k)$
1	1.5	2.0	1.75	> 0 o intervalo escolhido é $[m_k, b_k]$
2	1.75	2.0	1.875	> 0
3	1.875	2.0	1.9375	< 0 o intervalo escolhido é $[a_k, m_k]$
4	1.875	1.9375	1.90625	> 0 o intervalo escolhido é $[m_k, b_k]$
5	1.90625	1.9375	1.921875	> 0

Assim, uma aproximação para a raiz procurada é $m_5 = 1.921875$. Continuando o processo podemos refinar a solução. Após 20 iterações obtemos a aproximação
$m_{20} = 1.933753728866577$ e $f(1.933753728866577) = -4.48 \times 10^{-8}$.

4 Por que o método funciona?

O método da bissecção gera sempre uma sequência que converge para a solução. De fato, o método gera uma sequência de intervalos encaixados $I_0 = [a_0, b_0] \supset I_1 = [a_1, b_1] \supset I_2 = [a_2, b_2] \supset \ldots \supset I_k = [a_k, b_k] \supset \ldots$. Os extremos a_k dos intervalos compõem uma sequência monótona não decrescente limitada superiormente por b; portanto convergente. Os extremos b_k dos intervalos compõem uma sequência monótona não crescente limitada inferiormente por a, portanto convergente.

Como $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$ temos que

$$0 = \lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} b_k - \lim_{k\to\infty} a_k.$$

Segue que $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} a_k = L$. Isto é, ambas convergem para o mesmo limite L.

Agora mostraremos que L é raiz de $f(x)$. Como em cada passo tem-se $f(a_k)f(b_k) < 0$, então

$$0 \geq \lim_{k\to\infty} f(a_k)f(b_k) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) \lim_{k\to\infty} f(b_k) = [f(L)]^2 \geq 0.$$

Segue que $f(L) = 0$.

Acabamos por demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 4.1 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(a)f(b) < 0$. O método da bissecção gera uma sequência (m_k) que converge para a raiz c de f e satisfaz*

$$|m_k - c| \leq |b_k - a_k| \leq \frac{b-a}{2^k}, k \geq 1. \tag{1}$$

5 Estimativa para o número de iterações

É importante observar que se estamos procurando por uma aproximação para a raiz da equação com erro máximo ε, o fator $\dfrac{b-a}{2^k} < \varepsilon$ pode ser utilizado como critério de parada. O ponto médio m_k de $[a_k, b_k]$ é um candidato a solução e satisfaz $|b_k - m_k| \leq |b_k - a_k| \leq \dfrac{b-a}{2^k} < \varepsilon$ e, do mesmo modo, $|a_k - m_k| \leq |b_k - a_k| \leq \dfrac{b-a}{2^k} < \varepsilon$.

Uma aproximação para a solução é um ponto em $[a_k, b_k]$ e como $|a_k - m_k| \leq \dfrac{b-a}{2^k} < \varepsilon$, isolando k temos:

$$k > \frac{\ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\ln 2} \text{ ou equivalentemente, } k > \frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon)}{\ln 2}. \tag{2}$$

Referências

[1] DE FIGUEIREDO, D. G., **Análise I**. Rio de Janeiro: L.T.C., 1995.

[2] S. D. CONTE. *Elementary Numerical Analysis*. MacGraw-Hill, 1965.