A Torre de Hanoi

Doherty Andrade – Universidade Estadual de Maringá - Brasil

doherty200@hotmail.com

Sumário

1 Introdução

Tem-se n discos de diâmetros decrescentes em volta de uma haste A, dispõe-se de outras duas hastes B e C. Veja a figura 1.

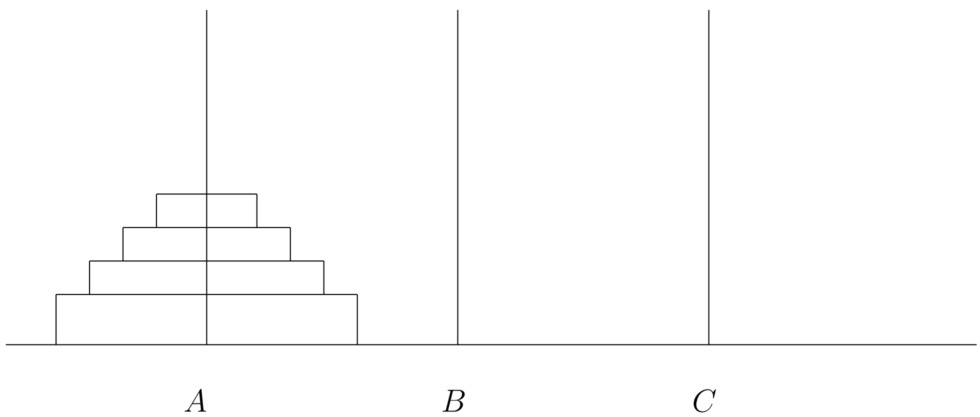

Figura 1: Situação Inicial

O problema consiste em transferir toda a pilha de discos para uma das hastes, deslocando um disco de cada vez para qualquer haste, de modo que nenhum disco seja colocado sobre o outro de diâmetro menor.

Algumas perguntas surgem imediatamente:

(a) O jogo tem solução? Como resolver?

(b) O jogo admite solução para todo n?

(c) Qual o número mínimo de movimentos para se conseguir a solução?

2 As respostas

A resposta para a primeira pergunta é afirmativa: o jogo admite solução para todo n. Vamos provar esta afirmação por indução.

Teorema da Torre de Hanoi

Seja P a proposição dada por:
$P(n)$: o jogo com n discos tem solução.
Afirmamos que para todo natural n, o jogo tem solução.

Seja S o conjunto dos números naturais que tornam $P(n)$ verdadeira. Claramente $P(0)$ é verdadeiro. Supondo que $P(n)$ é verdadeira, vamos supor que temos um jogo com $(n+1)$ discos. Veja figura 2.

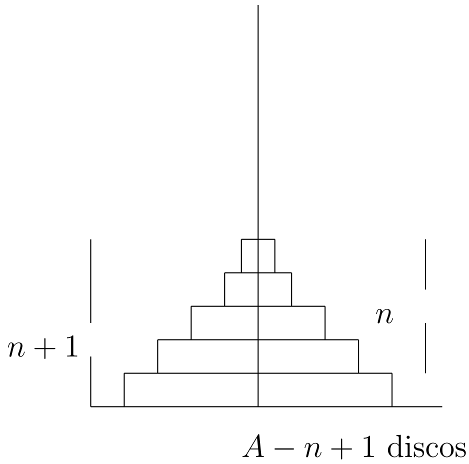

Figura 2: Problema com $n+1$ discos

Resolve-se o problema com os n discos superiores. Obtém-se a seguinte situação dada pela figura 3:

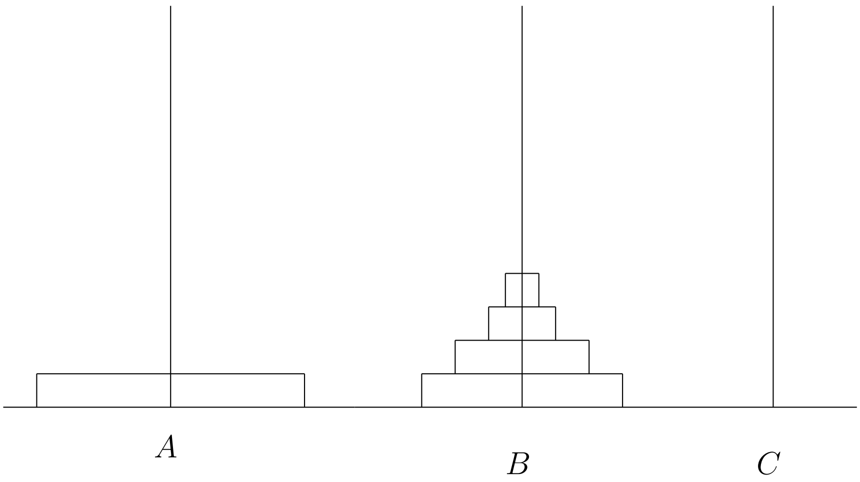

Figura 3: O Problema foi resolvido com n discos

A seguir coloca-se em C o que está em A, veja figura 4.

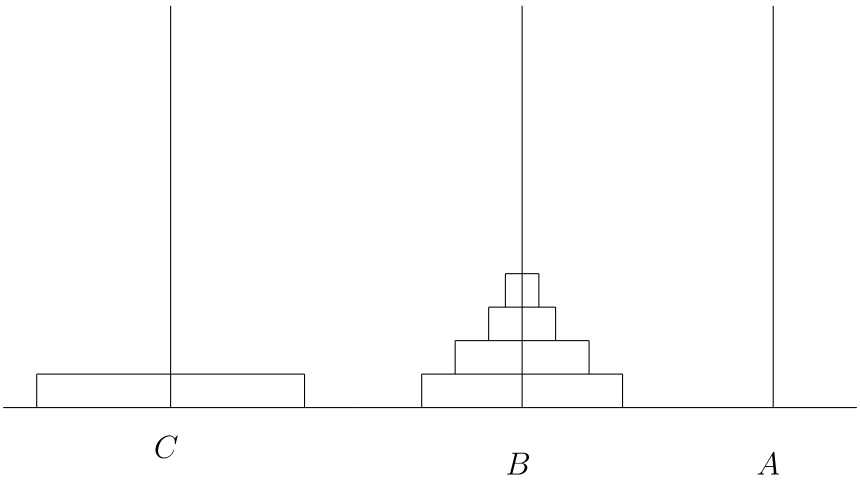

Figura 4: Resolve-se novamente o problema com n discos

Finalmente resolve-se novamente o problema com n discos para colocar a pilha da haste B para a haste C e o problema dos $(n+1)$ está resolvido. Fica provado assim a possibilidade de solução do jogo para um número qualquer de discos. Segue que $S = \mathbb{N}$.

Para resolver o problema com $(n+1)$ discos tivemos que resolver o problema com n discos duas vezes. Se J_n é o menor número de movimentos para resolver o problema com n discos, então $J_{n+1} = 2J_n + 1$, pois movemos uma peça a mais na última jogada.

Teorema sobre o número mínimo de jogadas

Para todo natural n tem-se que

$$J_n = 2^n - 1.$$

Por inspeção: $J_1 = 1$, $J_2 = 3 = 2^2 - 1$ e $J_3 = 7 = 2^3 - 1$.

A demonstração é por indução e deixada como um exercício.

3 A Lenda

Conta a lenda deste jogo, que há muitos séculos num templo oriental teriam sido erguidas duas colunas de prata e uma de ouro. Ao redor de uma das colunas de prata haviam 100 discos perfurados, com raios decrescentes, colocados uns sobre os outros de modo que o maior disco fique sob o disco de menor raio. Cada devoto que visitasse o templo deveria mover um disco de uma coluna para a outra respeitando as regras do jogo. Quando todos os 100 discos estivessem sido transferidos para a coluna de ouro o mundo acabaria.

Se cada segundo um devoto movesse um disco, o tempo mínimo para que ocorresse a tragédia seria $2^{100} - 1$ segundos o que dá aproximadamente 300×10^{18} séculos.

Conta-se que esta lenda foi introduzida pelo matemático francês Édouard Lucas no século XIX, a partir de uma lenda hindu, para tornar este quebra-cabeça matemático mais atraente. Hoje este jogo é um dos mais famosos do mundo.

Referências

[1] Lucas, Édouard. *Récréations Mathématiques.* Gauthier-Villars, Paris, 1883.

[2] Gardner, Martin. *Mathematical Games: About the Remarkable Similarity between the Icosian Game and the Tower of Hanoi*. Scientific American, vol. 201, no. 5, 1959, pp. 150–156.

[3] Graham, Ronald L., Knuth, Donald E., and Patashnik, Oren. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.

[4] Singmaster, David. *Sources in Recreational Mathematics: An Annotated Bibliography*. Lulu Press, Morrisville, NC, 2005.